

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士課程(前期課程)
素粒子宇宙物理学専攻(素粒子宇宙物理系)
素粒子宇宙物理学専攻(宇宙地球物理系)
物質理学専攻(物理系)

問題 その1

2007年8月28日(火) 9時20分～11時20分

受験上の注意

1. この冊子には物理学【I】、物理学【II】の2題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が2枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。
2. 素粒子宇宙物理学専攻(素粒子宇宙物理系)もしくは物質理学専攻(物理系)を第4志望までに1つでも志望するものは、物理学【I】および【II】のみを選択すること。
3. 答案用紙は黄、青を全員に各1枚、出願時の志望先に応じて必要な者に紫を2枚ずつ、それに草案用紙を各1枚配布してあるが、解答用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。
4. 答案用紙最下段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではいない。

問1 図1の一次元井戸型ポテンシャルを考える。

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq L \\ +\infty, & L < x \end{cases}$$

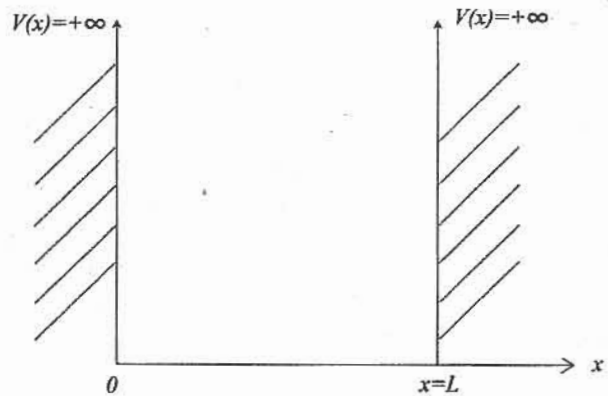


図1

- (1) この井戸に束縛された質量 m の電子のシュレーディンガー方程式を書け。
- (2) このシュレーディンガー方程式を解き、エネルギー固有状態の波動関数とエネルギー固有値を求めよ。

問2 図2に示されるレチナール分子は網膜内のロドプシンに結合し、高感度で光を検出する。このレチナール分子の電子状態を前問の井戸型ポテンシャルを用いたモデルで考察してみよう。このモデルでは、レチナールの分子骨格の中の10個の電子が図2の長さ L の井戸型ポテンシャルの中を自由に動き回ることができるものとする。

- (1) レチナール分子の基底状態を考える。各エネルギーレベルの電子の占有状態をスピン状態に注意して記述せよ。解答用紙に図を用いて示してもよい。

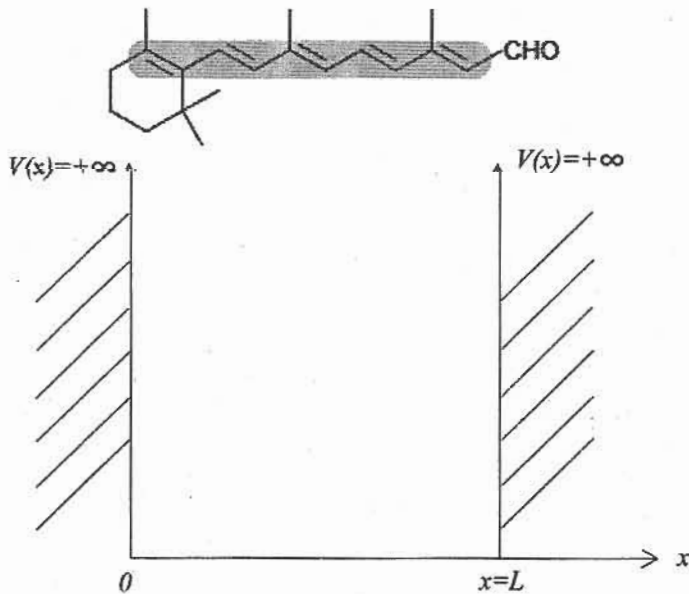


図2

(2) 上述のレチナール分子のモデルで $L=1.0[\text{nm}]$ であるとする。基底状態にあるレチナール分子の光の吸収を考える。エネルギー最高の占有レベルからエネルギー最低の非占有レベルへと電子が励起されるときに吸収する光の波長を有効数字1桁で求めよ。ただし、電子の質量 $m=9.1\times 10^{-31}[\text{kg}]$ 、光速 $c=3.0\times 10^8[\text{m/s}]$ 、プランク定数 $h=6.6\times 10^{-34}[\text{Js}]$ であることを用いよ。(ただし、電子のコンプトン波長の逆数が $\frac{mc}{h}=4.1\times 10^2[\text{nm}^{-1}]$ であることを用いてもよい。)

(3) 図3のカロチンの電子状態の基底状態を同様のモデルで考える。カロチンは2つのレチナールが結合した構造をしている。 L はレチナールの場合のちょうど2倍、一次元の井戸に束縛されている電子が22個であるとする、最高占有レベルから最低非占有レベルへと光子を1個吸収して電子が1個励起されるときに吸収する光の波長は前問のレチナールの場合の何倍になるか？

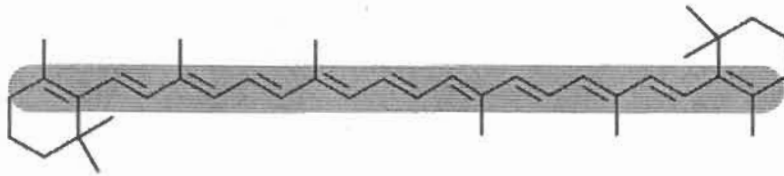


図3

問3 基底状態にあるクロロフィル(図4)の側鎖を除いた部分の電子状態を考える。長さ L のリング上を18個の電子が自由に動き回るものとして、各エネルギーレベルの電子の占有状態をスピン状態に注意して記述せよ。解答用紙に図を用いて示してもよい。

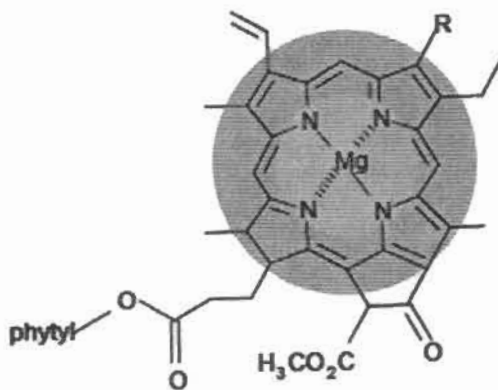
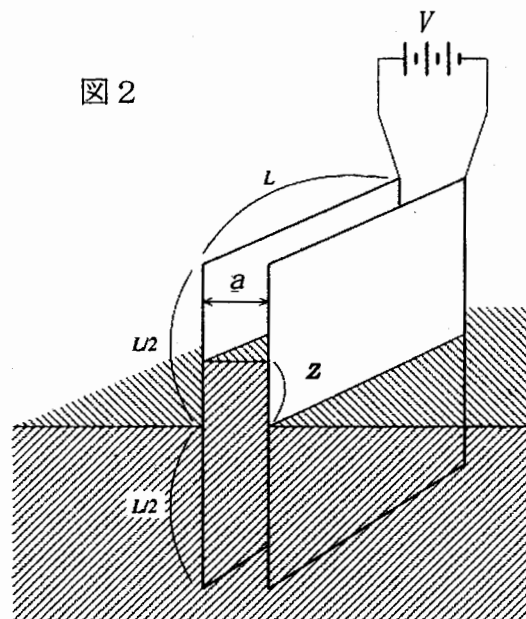
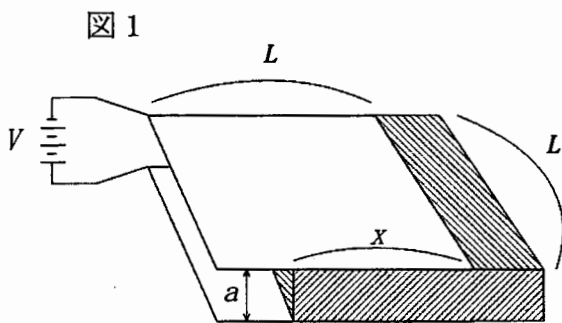


図4

物理学 [II] (答案用紙: 青)

問 1 一辺の長さ L の正方形の導体板 2 枚を間隔 a ($\ll L$) で平行に配置してコンデンサを作る。以下の問いに答えよ。

- (1) 電圧 V の電池につなぎ、真空中 (誘電率 ϵ_0) に置く。このコンデンサに蓄えられたエネルギーを求めよ。
- (2) 次に図 1 のように、このコンデンサを水平に置き、右から誘電率 ϵ の物質を x だけ挿入する。この状態におけるコンデンサの静電容量を求めよ。
- (3) このコンデンサに蓄えられたエネルギーを求めよ。
- (4) 誘電体を x から $x+dx$ に微小変化させたときに、電池がする仕事を求めよ。
- (5) 挿入された誘電体に加わる力を求めよ。



問 2 次に、図 2 のように、このコンデンサを鉛直に置き、誘電率 ϵ 、密度 ρ の液体中に浸す。2 枚の導体板の上下の辺は液体面に平行、左右の辺は垂直である。導体板の外側の面においてちょうど半分の面積が液体に浸っている。板の内側の液体面の高さは、外側よりも z だけ高くなったとする。液体は十分大きな容器に入れられているとし、表面張力や粘性は無視できるとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 外の液面より上にある、誘電体に加わる重力を z を用いて表せ。重力加速度を g とせよ。
- (2) z を求めよ。
- (3) この状態で電池を外すと、板の内側の液面の高さは変わらなかった。式を用いてその理由を示せ。

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士課程（前期課程）
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質物理学専攻（物理系）

問題 その2

2007年8月28日（火）13時00分～15時00分

受験上の注意

1. この冊子には物理学【Ⅲ】、物理学【Ⅳ】の2題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が2枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。
2. 素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）もしくは物質物理学専攻（物理系）を第4志望までに1つでも志望するものは、物理学【Ⅲ】および【Ⅳ】のみを選択すること。
3. 答案用紙は赤、緑を全員に各1枚、出願時の志望先に応じて必要な者に茶を2枚ずつ、それに草案用紙を各1枚配布してあるが、解答用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。
4. 答案用紙最下段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではいない。

問 1

ナノチューブ内に封じ込められた気体分子の熱運動について考える。ここでナノチューブとは炭素原子からできた非常に細長い円筒形の管である。簡単のため、気体分子の直径がナノチューブの内径とちょうど同じであると、気体は剛体球の1次元古典気体として扱えるものとする。また、気体分子間の相互作用ポテンシャル u は、気体分子の直径 (= ナノチューブの内径) を d 、分子の中心間の距離を X としたとき、

$$u(X) = \begin{cases} \infty & X < d \\ 0 & X \geq d \end{cases}$$

と与えられるとする。気体分子の回転運動は無視してよいものとして、以下の問いに答えよ。必要ならば、積分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いてよい。

温度 T 、長さ L 、分子数 n ($L > nd$) の一次元剛体球気体のヘルムホルツ自由エネルギー F は

$$F(T, L, n) = -nk_B T \left[\frac{1}{2} \log \frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} + \log \frac{L - nd}{n} + 1 \right] \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 k_B はボルツマン定数、 m は分子の質量、 \log は自然対数、 $\hbar = h/2\pi$ で、 h はプランク定数を表す。

- (1) (1) 式を使って、1次元気体のエントロピー S を求めよ。
- (2) 1次元気体の圧力 P を求めよ。
- (3) 気体分子の分配関数 Z を運動量についての積分 Z_K と位置座標についての積分 Ω に分離したとき、 $Z = Z_K \Omega / (2\pi\hbar)^n$ と表され、各積分は次のように書き表される。

$$Z_K = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2mk_B T}\right) \prod_{j=1}^n dp_j \quad (2)$$

$$\Omega = \int \cdots \int_{x_1 < x_2 < \cdots < x_n} \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) \prod_{i=1}^n dx_i \quad (3)$$

ここで、 U は分子間に働くポテンシャルの和を表す。(2) 式の積分を行い、 Z_K を求めよ。

問 2

半導体界面や液体ヘリウム表面に束縛された電子系は2次元的な振舞いを示す。2次元電子系のモデルとして x 、 y 、 z 方向の長さがそれぞれ L 、 L 、 d ($d \ll L$) の箱の中の電子を考える。電子の質量は m 、電荷は $-e$ 、スピンは $1/2$ で、電子間の相互作用は無視する。1粒子状態のエネルギーを ε とするとき、温度 T 、化学ポテンシャル μ のフェルミ分布関数は

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} + 1} \quad (1)$$

である。

- (1) 1粒子状態の状態密度を $\mathcal{D}(\varepsilon)$ とするとき、全粒子数 N と全エネルギー E を $f(\varepsilon)$ を使って表す式を書け。
- (2) 1粒子状態の状態密度 $\mathcal{D}(\varepsilon)$ は、エネルギー ε 以下の1粒子状態の数 $\mathcal{N}(\varepsilon)$ と $d\mathcal{N}(\varepsilon)/d\varepsilon = \mathcal{D}(\varepsilon)$ の関係にある。一辺 L の正方形の2次元自由粒子系を考える。連続変数と見なせる2次元運動量を $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ 、その大きさを $p (= \sqrt{p_x^2 + p_y^2})$ とするとき、運動量が p 以下の状態の数 $\mathcal{N}(p)$ を求め、それから $\mathcal{D}(\varepsilon)$ を計算せよ。
- (3) 箱の2辺 L が巨視的な大きさで、一辺 d が原子的な大きさとするとき、箱の中の1電子のエネルギー ε は、 xy 面内の運動量 \mathbf{p} と z 方向の波動関数の節の数を示す量子数 n_z で

$$\varepsilon(p_x, p_y, n_z) = \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + p_y^2 + \left(\frac{\pi \hbar}{d} \right)^2 (n_z + 1)^2 \right] \quad (2)$$

と表される (図 1)。

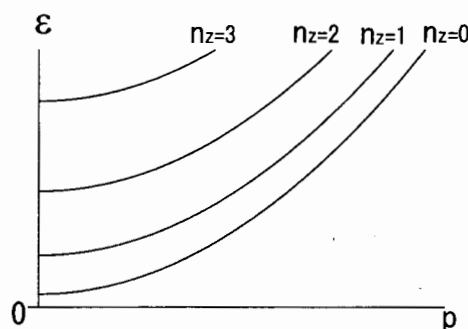


図 1: 2次元運動量 p とエネルギーの関係

前問の結果から、全体の状態密度 $\mathcal{D}(\varepsilon)$ の様子が図 2 のようになることを説明せよ。ただし \mathcal{D}_0 はある定数、 $\varepsilon_0 = \varepsilon(0, 0, 0)$ である。

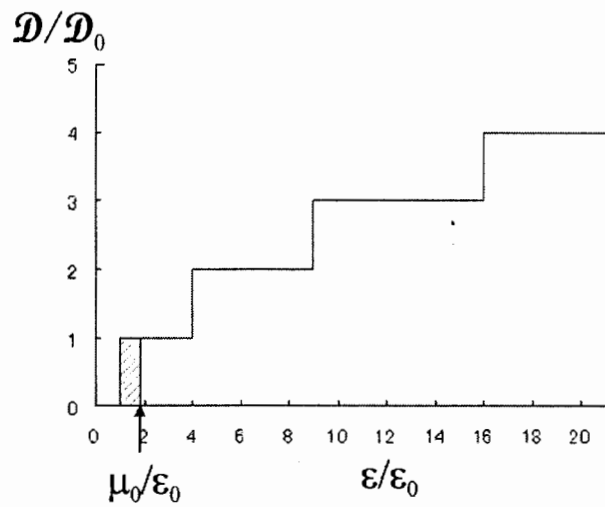


図 2: 状態密度

- (4) 絶対零度 $T = 0$ では粒子数が少なければ ($N < N_0 \equiv 3\epsilon_0 D_0$ ならば)、 $n_z = 0$ の状態のみが占拠されている (図 2 の斜線部分)。有限温度で、粒子数 N がこの N_0 より十分小さく、また十分低温のとき $n_z = 1$ の状態に入っている電子数を見積もれ。ただし、低温での化学ポテンシャル μ は絶対零度での化学ポテンシャル μ_0 と同じとみなせる。

物理学 [IV] (答案用紙: 緑)

質量 m の質点が xy 平面上を運動している。質点の座標は $\vec{r} = (x, y)$ である。質点には原点からの距離 $r \equiv |\vec{r}|$ だけに依存するポテンシャル $V(r)$ が作用している。

- (1) 質点の座標 (x, y) を極座標 (r, φ) で表せ。
- (2) 質点の運動エネルギー K を極座標で表せ。
- (3) この系のラグランジアン L を極座標を用いて表し、 r と φ についての運動方程式をそれぞれ導け。
- (4) 系の角運動量 l と全エネルギー E とがそれぞれ保存することを示せ。
- (5) (3) で求めた r についての運動方程式は、質量 m の質点がポテンシャル $V_{\text{eff}}(r)$ のもとで1次元上を運動する方程式に帰着することを示し、ポテンシャル $V_{\text{eff}}(r)$ を $V(r)$ と l を使って書け。
- (6) ポテンシャル $V(r)$ は

$$V(r) = \frac{1}{\alpha} k r^\alpha \quad (k > 0, -2 < \alpha < 0) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

と書けるものとする。

$l \neq 0$ のとき、(5) で求めた有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(r)$ の概略図を描け。

- (7) $\textcircled{1}$ のポテンシャル中では、質点が等速円運動をする解がある。この円運動の半径 r_0 と角速度 Ω を求めよ。

さらに、 $V(r)$ が万有引力のポテンシャル $V(r) = -\frac{GMm}{r}$ ($G > 0, M > 0$) の場合、ここで求めた円運動に対して半径 r_0 と周期 T の間に質量 m によらない関係があることを示せ。(ケプラーの第3法則)

- (8) ポテンシャル $\textcircled{1}$ 中での等速円運動の軌道から、 r をわずかに変えたところ、質点の座標 r が r_0 近傍で微小振動をはじめた。この微小振動の角振動数 ω および比 ω^2/Ω^2 を求めよ。

大学院入試問題

(宇宙地球物理系追加問題)

名古屋大学大学院理学研究科博士課程(前期課程)
素粒子宇宙物理学専攻(宇宙地球物理系)

追加問題 その1

2007年8月28日(火) 9時20分～11時20分

受験上の注意

1. この冊子には、化学【Ⅰ】、化学【Ⅱ】の2題ある。先の物理学の2題の問題とあわせて4題のうち2題を選択し、解答すること。
答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が2枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。
2. 素粒子宇宙物理学専攻(素粒子宇宙物理系)もしくは物質物理学専攻(物理系)を第4志望までに1つでも志望するものは、物理学のみを選択すること。
3. この追加問題の答案用紙は紫色である。解答用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。
4. 答案用紙最下段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではいない。

化学 [I] (答案用紙: 紫)

塩素原子による成層圏オゾン層破壊の一連の反応の中で以下の二分子反応は重要な役割を果たしている。



実験室でこの反応(1)の反応速度定数 k_1 を測定したい。温度 300 K に保ちながら、気体セルにアルゴン Ar と少量の塩素分子 Cl_2 と少量のオゾン O_3 を混ぜた気体を充填した。そのセルに非常に時間幅の短い 355nm のレーザー光を照射して、下記の光分解反応で瞬時に塩素原子 Cl を生成させた。



O_3 ガスは 355nm の光を吸収しないのでこのレーザー光では変化しない。また Ar ガスは 355nm の光を吸収せず、また化学反応には関与しない。瞬時に生成した塩素原子 Cl の引き続く濃度変化は反応(1)のみによって進む。従って、塩素原子濃度 $[\text{Cl}]$ を時間を追って測定すれば、反応(1)の反応速度がわかると考えられる。下記の問いに答えよ。

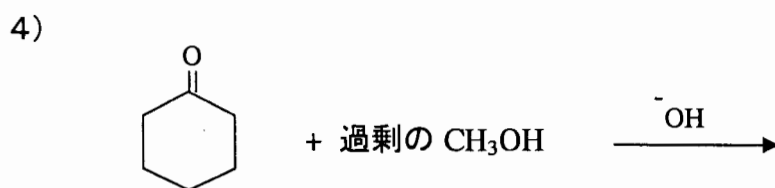
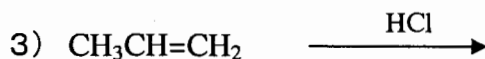
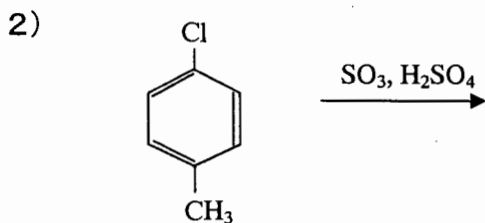
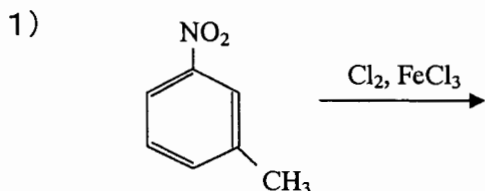
- 1) 瞬時に光分解で生成した塩素原子濃度 $[\text{Cl}]$ が引き続き反応(1)で減少する速度 $\frac{d[\text{Cl}]}{dt}$ はどのような式で表せるか。
- 2) 反応速度の解析を簡単にするために、実験条件として光分解で生成する塩素原子の初期濃度 $[\text{Cl}]_0$ に較べてセル内のオゾン濃度 $[\text{O}_3]$ が大過剰になるような条件を採用した。この場合はオゾン濃度 $[\text{O}_3]$ は、反応(1)で減少する割合は小さく、反応が進んでも一定であると近似できる。このとき、塩素原子濃度 $[\text{Cl}]$ が反応(1)で減少する速度 $\frac{d[\text{Cl}]}{dt}$ はどのような式で書き表せるか。また、反応が進んだ時刻 t における塩素濃度 $[\text{Cl}]_t$ はどのような式で表わせるか。このときのオゾンの初期濃度を $[\text{O}_3]_0$ とする。
- 3) 時刻 $t=0$ で瞬時に生成した塩素原子のその後の濃度の時間変化を予測し、手書きのグラフで描け。ただし、2)で述べた条件が成り立つとする。
- 4) 次回の実験で、他の実験条件を変えずに、オゾンの初期濃度だけを倍にして、すなわち $2[\text{O}_3]_0$ として実験を行った。このとき予測される塩素原子濃度の時間変化の手書きのグラフを、3)で描いたグラフに重ねて点線で描け。さらに次の実験ではオゾンの初期濃度を $3[\text{O}_3]_0$ とした。このときに得られると予想される塩素原子濃度の時間変化を一点鎖線で同じグラフに重ねて描け。
- 5) オゾンの初期濃度を $[\text{O}_3]_0$ 、 $2[\text{O}_3]_0$ 、 $3[\text{O}_3]_0$ としたときに観測される塩素原子濃度の減衰速度から、二分子反応(1)の反応速度定数 k_1 を求めるにはどうしたらよいか述べよ。
- 6) ここまでの実験は 300 K の温度一定の条件で行った。さらに次に温度 250 K で一連の実験を行い反応速度定数 k_1 を求めた。また、さらに温度 350 K でも実験を行った。これらの実験の結果、同じ濃度条件では温度が高いほど反応(1)は速く反応が進むことがわかった。この反応速度の温度依存性に関して考えられる理由を述べよ。

化学 [III] (答案用紙: 紫)

II-1. 下記の問いに答えよ。

- 1) 硫酸を触媒として 2-ブタノールを分子内脱水する反応の反応機構を説明して、その反応生成物の構造を書け。
- 2) 上記1)の反応の主生成物に臭素 Br_2 を付加させたときの反応機構を立体的に書け。
- 3) フェノールの水溶液は弱い酸性を示す ($\text{p}K_a \sim 10$)。その理由として考えられることを説明せよ。
- 4) フェノールのニトロ置換体の 4-ニトロフェノール (別名 p-ニトロフェノール) はフェノールよりさらに酸性が強い ($\text{p}K_a \sim 7.15$)。その理由として考えられることを説明せよ。

II-2. 下記の反応の主な生成物は何か。



大学院入試問題

(宇宙地球物理系追加問題)

名古屋大学大学院理学研究科博士課程(前期課程)
素粒子宇宙物理学専攻(宇宙地球物理系)

追加問題 その2

2007年8月28日(火) 13時00分～15時00分

受験上の注意

1. この冊子には、化学【Ⅲ】、化学【Ⅳ】の2題ある。先の物理学の2題の問題とあわせて4題のうち2題を選択し、解答すること。
答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が2枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。
2. 素粒子宇宙物理学専攻(素粒子宇宙物理系)もしくは物質物理学専攻(物理系)を第4志望までに1つでも志望するものは、物理学のみを選択すること。
3. この追加問題の答案用紙は茶色である。解答用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。
4. 答案用紙最下段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではいない。

化学 [III] (答案用紙: 茶)

III-1. クロム酸銀 Ag_2CrO_4 は難溶性の塩であるが、これが水と接して溶解平衡にあるとする。

濃度の単位として mol dm^{-3} を用いる。下記の問題に答えよ。

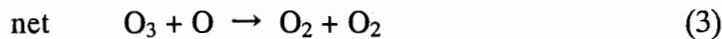
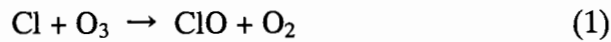
- 1) この状態の水相と固相の溶解平衡の化学式を書け。
- 2) クロム酸銀の溶解度積 K_{sp} の定義を書け。
- 3) クロム酸銀の溶解度積の値が 3.2×10^{-11} とすると平衡水溶液中の銀イオンの濃度 $[\text{Ag}^+]$ はいくらから計算せよ。
- 4) 水溶液中のイオン積 IP が K_{sp} より大きい状態を何と言うか。また、その状態に引き続いてどうい現象が起こるか。
- 5) 共通イオン効果についてクロム酸銀溶液を例に説明せよ。

III-2. 炭酸水素ナトリウム NaHCO_3 の濃度 c (mol dm^{-3}) の希薄な水溶液を考える。下記の問題に答えよ。

- 1) 水溶液中でどのような平衡反応が起きているか、化学式を書け。
- 2) 物質収支の式はどのように表わされるか。
- 3) 電荷釣り合いの式はどのように表わされるか。
- 4) H_2CO_3 の第一段の酸解離定数を K_{a1} 、第二段の酸解離定数を K_{a2} とすると、この炭酸水素ナトリウム水溶液の pH はどのような式で表わすことができるか。
ただし、 $[\text{Na}^+] \gg [\text{H}^+]$ および $[\text{HCO}_3^-] + 2[\text{CO}_3^{2-}] \gg [\text{OH}^-]$ の条件が成り立つとしてよい。

化学 [IV] (答案用紙: 茶)

地球環境問題の一つである成層圏オゾン層破壊について考察する。近年問題となっている成層圏オゾン層破壊では、人類が大気中に放出した塩素化合物である [A] が重要な原因物質であると考えられている。[A] の大気中での寿命は 50-100 年程度だと考えられており、この長い寿命のために地上で放出したものが高度 15-50 km の成層圏まで拡散して行き、太陽紫外光により光分解されて塩素原子 Cl を放出する。塩素原子 Cl は下記のような反応でオゾンを破壊する。



[A] がオゾン破壊を引き起こすことが科学的に予測されたので、国際的に [A] の生産・使用・放出を規制することが決められた。そこで性質が良く似ていて代替に使用できるが、より大気中の寿命が短い化合物 [B] を使うようになった。[B] は大気中の寿命が短くなって成層圏まで拡散しにくくなったが、塩素を含むので、まだオゾン破壊の効果はいくらか残っている。そこで、さらに代替化合物として [C] を使うようになった。この [C] は塩素を含まないので、オゾン破壊に寄与しないと考えられている。しかし、もう一つの地球環境問題である地球温暖化の温室効果気体として、大気中の [C] が作用することがわかった。そこで、地球温暖化防止の国際的な取り決めである京都議定書では [C] の放出も今後の削減対象としている。

以下の問いに答えよ。

- 1) 化合物 A, B, C は何か。代表的な化合物の例を挙げて説明せよ。
- 2) 化合物 A, B, C を人類はどのような目的で使っていたか、あるいは使っているか。代表的な応用例を挙げよ。
- 3) 化合物 A の大気中での寿命が 50-100 年と非常に長いことについて考えられる理由を書け。
- 4) 反応(1)-(3)でオゾン層破壊が起きると考えられている。成層圏でのオゾン層破壊物質の濃度はオゾンの 1/10000 以下である。オゾン層破壊物質が極微量にもかかわらずオゾンの数%が破壊されるという事態がなぜ引き起こされるのか、考えられる理由を書け。
- 5) 化合物 A, B, C の地球温暖化係数は CO₂ を基準にして 1000 倍以上である。なぜこれらの化合物の温暖化の効果が大きいのか、考えられる理由を書け。