大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士課程（前期課程）
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学　問題【Ⅰ】【Ⅱ】

２０１４年８月２７日（水）９時２０分～１１時２０分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ⅰ】、物理学【Ⅱ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．答案用紙は黄、青を全員に各１枚、それに草案用紙を各１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。

３．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

物理学 [I] (答案用紙：黄)

重力定数を G として，以下の問いに答えよ．

A. 中心力ポテンシャル $V(r)$ 中における，質量 m を持つ質点の運動について考える．

1. この質点にある速度 $\boldsymbol{v}$ を与えると，原点と $\boldsymbol{v}$ を含む 2 次元平面内を運動する．この平面上の質点の位置 (r, θ) を用いて，質点　の運動エネルギーを記せ．
2. 質点のラグランジアンを求めよ．
3. 質点の運動方程式を求めよ．

B. 慣性座標系における原点 O に質量 M の質点を固定し，その周囲を一様な質量密度 ρ の媒質で $r \leq R_0$ の領域を満たす．

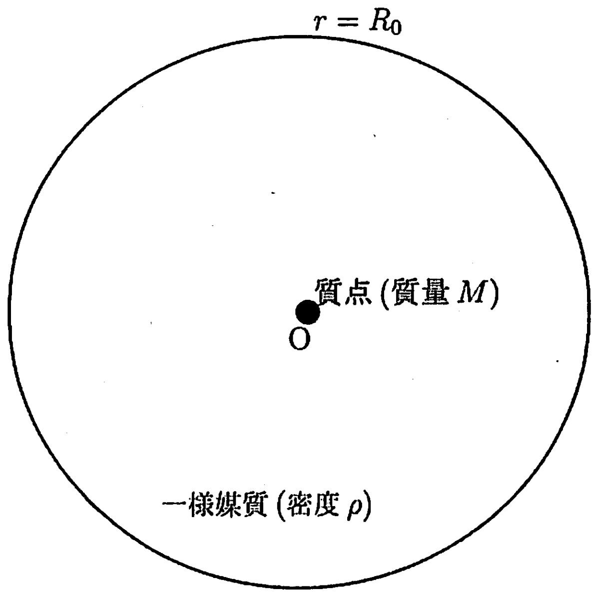

図 1

1. $r > R_0$ と $r \leq R_0$ のそれぞれの領域について，無限遠を基準とした重力ポテンシャルを求めよ．ここで，原点からの距離 r に存在する単位質量の質点に働く重力 $\boldsymbol{F}$ は，原点を中心とする半径 r の球内に含まれる総質量 $Q(r)$ と以下の関係 (ガウスの法則) があることを用いて良い．

$$\int \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS = -4\pi G Q(r)$$

ここで，dS は半径 r の球面の面積要素であり，$\boldsymbol{n}$ は面積要素に垂直な外向きの単位ベクトルである．

2. 質量 m の質点が $r \leq R_0$ の領域を円運動する場合の，回転角速度 Ω_c を求めよ．

C. 原点に質量 M の質点を固定する．質量 m_1 の質点 1 に，質量の無視できる自然長 l_0，ばね定数 k のばねを取り付ける．ばねのもう一方の端には，m_1 よりも十分小さな質量 m_2 を持つ質点 2 を取り付ける．質点 1，2 の座標をそれぞれ (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) とし，質点 1 が一定の角速度 $\dot{\theta}_1 = \Omega_1 = \sqrt{GM/r_1^3}$ で円運動をしている場合に，以下の設問に答えよ．なお，質点 1 および質点 2 には原点にある質点からのみ重力が働き，質点 1 と 2 の間の重力は無視せよ．

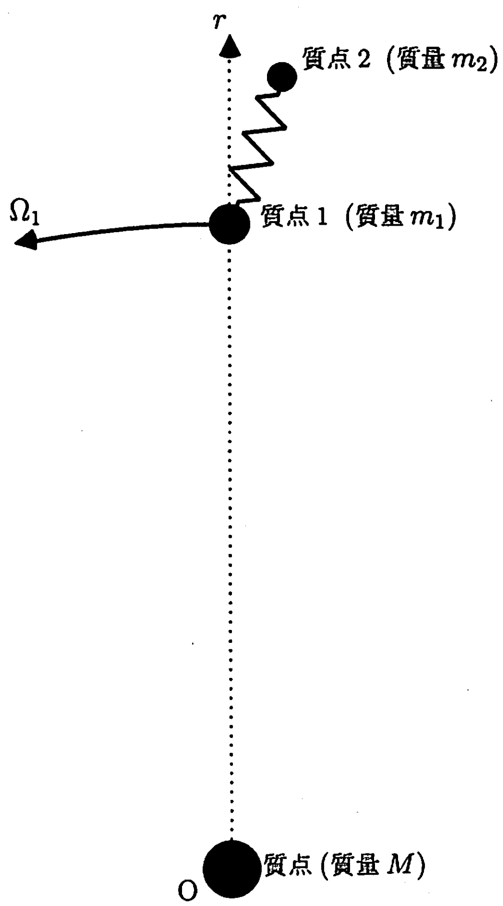

図 2

1. 質点 2 の運動方程式の r 成分を求めよ．

以下の設問では，質点 2 も質点 1 と同じ角速度 Ω_1 で運動し，ばねの向きが動径軸に一致している場合を考えよう．

2. 質点 2 が質点 1 より外側 $(r_2 > r_1)$ にあり，質点 2 に働く力 (重力，遠心力，およびばねの復元力) が釣り合っている場合の r_2 を求めよ．この際，$\Delta r = r_2 - r_1$ に対し $\Delta r \ll r_1$ が成立している状況に限定し，$(\Delta r / r_1)$ の 2 次以上の項は無視して良い．
3. 設問 2 で，質点 2 に働く力の釣り合いが実現するために k が満たすべき条件を，$r_2 > r_1$ の場合について求めよ．また，この条件が満たされない場合の質点 2 の運動はどのようになるか，定性的に論ぜよ．
4. $r_2 < r_1$ の場合についても，設問 3 と同様に，釣り合い条件と，この条件が満たされない場合の運動を論ぜよ．

物理学 [II] (答案用紙：青)

問1　電磁場が時間的に一定の場合，磁場$\vec{B}$と電流密度$\vec{j}$は $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$ の関係にある（ここでμ_0は真空の透磁率）．また，定常電流がつくる磁場は，以下のビオ・サバールの法則によっても記述される．

$$\vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{x}')\times(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}d^3x'$$

これらを参考にして以下の設問に答えよ．

(1-1)　$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$から，アンペールの法則$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$を導け．ここで$d\vec{l}$は曲面を周回する線素であり，$I$はその曲面を貫く全電流を表す．

(1-2)　無限遠まで延びた半径aの円柱状の導体中を，中心軸(z)に平行に一様な電流密度$\vec{j}$の電流が流れているとする（図 1-1 参照）．中心軸から距離rに生じる磁場を求めよ．

(1-3)　長さLで太さが無視できる導線中を電流Iが流れていると仮想的に考える．ビオ・サバールの法則から，導線の中点Oから垂直方向へ距離rだけ離れた点Pの磁場を求めよ（図 1-2 参照）．

(1-4)　上記(1-3)の導線が無限に長い場合，導線から距離rの点に生じる磁場は，上記(1-2)において導体外側の領域に対して得られた結果に一致することを示せ．

(1-5)　ベクトルポテンシャル$\vec{A}$を$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$となるように定めると，

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$

と表される．これから，上記のビオ・サバールの法則を導け．

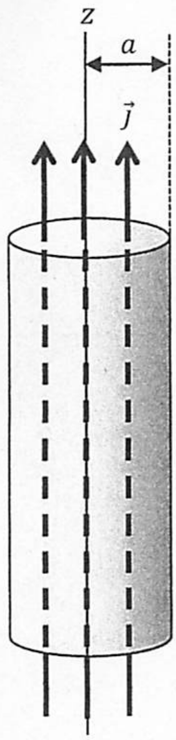

図 1-1: 円柱状の導体中を流れる電流の模式図

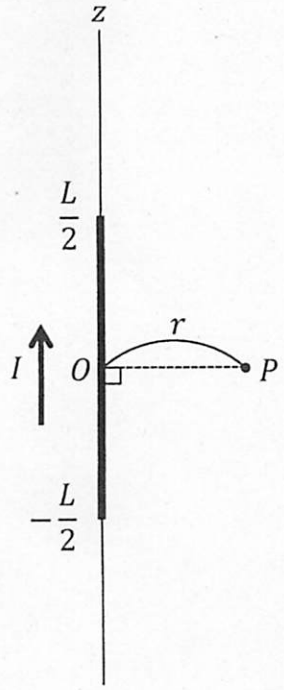

図 1-2: 長さLの導線とそこを流れる電流の概念図

物理学 [II] (答案用紙：青)

問2　y軸に平行で一様な外部磁場$\vec{B}_0 = B_0\hat{y}$の下に，太さが無視できる一様な導体で作った一辺の長さLをもつ正方形のコイルが図2のように設置されている(ここで, $B_0 > 0$, $\hat{y}$はy方向の単位ベクトルを示す)．コイル中心は座標原点Oに一致し，辺ABと辺CDはz軸に平行となるように置かれ，コイルはz軸を中心に自由に回転できるようになっている．真空の透磁率をμ_0として以下の設問に答えよ．

(2-1) このコイルに電源を接続し，$A \to B \to C \to D \to A$の向きに一定の電流$I$を流したとする．コイル面と$x$軸のなす角を$\theta$として，一様な外部磁場$\vec{B}_0$とコイル電流により，コイルに働く偶力の大きさを求めよ（ここでコイル電流が作る磁場の寄与は無視せよ）．

(2-2) 上記(2-1)のようにコイル電流Iが流れている状態でコイルが安定な平衡位置にある時，コイル中心の磁場$\vec{B}$の大きさを求めよ（上記(1-3)の結果を用いよ）．

(2-3) 上記の導体の単位長さ当たりの質量をλとして，コイルのz軸まわりの慣性モーメントKを求めよ．

(2-4) 上記(2-1)において$|\theta| \ll 1$の場合，コイルは単振動を起こす．z軸まわりのコイルの慣性モーメントをKとして，単振動の角振動数を求めよ．なお，誘導電流は無視できるとし，Kには上記(2-3)の結果を代入しないこと．

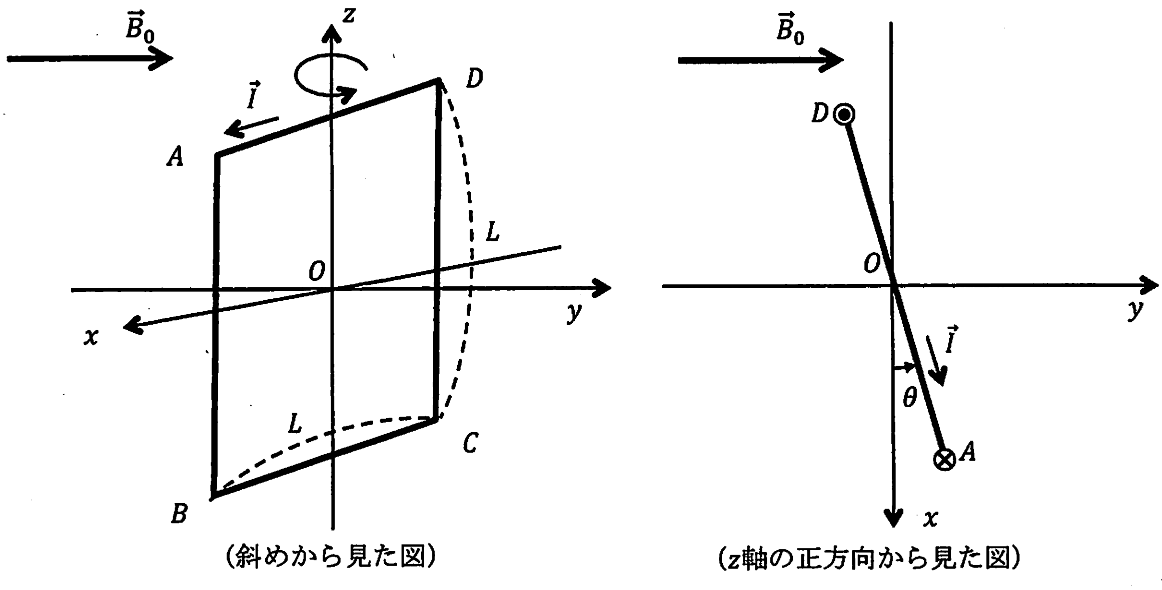

図 2: コイルの配置の概念図

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士課程（前期課程）
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学　問題【Ⅲ】【Ⅳ】

２０１４年８月２７日（水）１３時００分～１５時００分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ⅲ】、物理学【Ⅳ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．答案用紙は赤、緑を全員に各１枚、それに草案用紙を各１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。

３．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

一次元の量子力学について以下の問いに答えよ．

問 1 一粒子ハミルトニアン H が次式で与えられるものとする．

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \tag{1}$$

$$U(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0 \text{ または } x > L) \\ 0 & (0 \leq x \leq L) \end{cases} \tag{2}$$

ここで，m は粒子の質量，$\hbar$ はプランク定数，x は粒子の座標である．L は正の定数とする．

(a) ハミルトニアン H のエネルギー固有値を E，固有状態の波動関数（空間部分）を $\phi(x)$ とする．固有値方程式を書け．

(b) $x < 0$ または $x > L$ における波動関数 $\phi(x)$ を求めよ．

(c) 問 1(a) の固有値方程式を解き，固有状態の $0 \leq x \leq L$ での波動関数およびエネルギー固有値を求めよ．ただし規格化の必要は無い．また，エネルギー固有値を小さい順に E_1, E_2, E_3, $\cdots$ とした時，E_1, E_2, E_3 に対応する固有状態の波動関数 $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$ を図示せよ．

問 2 (2) 式で与えられたポテンシャル $U(x)$ 中を運動する二つの同種粒子を考える．ハミルトニアンは次式で与えられる．

$$H_{\text{tot}} = H_1 + H_2 + V(x_1 - x_2) \tag{3}$$

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + U(x_1) \tag{4}$$

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + U(x_2) \tag{5}$$

x_1, x_2 は粒子の座標，$U(x_1), U(x_2)$ は (2) 式と同じポテンシャル，$V(x_1 - x_2)$ は粒子間の相互作用を表すポテンシャルである．粒子のスピンによる縮退は考慮しないものとする．

(a) $V(x_1 - x_2) = 0$ で 2 つの粒子が異なるエネルギー準位にあるとき，H_{tot} の固有状態の波動関数のひとつは

$$\psi^{(0)}(x_1, x_2) = a\phi_i(x_1)\phi_j(x_2) + b\phi_j(x_1)\phi_i(x_2) \tag{6}$$

と表される．ここで $\phi_i(x)$ は i 番目の一粒子エネルギー固有値 E_i に対応する一粒子固有状態の波動関数であり，規格化されているものとする．ただし $i \neq j$ とする．また a, b は定数である．この固有状態のエネルギー固有値 $E^{(0)}$ を求め，(6) 式の $\psi^{(0)}(x_1, x_2)$ には独立な固有状態が二つあることを示せ（これを縮退という）．

(b) $V(x_1 - x_2) \neq 0$ により $\psi^{(0)}(x_1, x_2)$ の縮退は解ける．一次摂動の永年方程式は次式で与えられる．

$$\begin{pmatrix} P - (E - E^{(0)}) & Q \\ Q & P - (E - E^{(0)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \tag{7}$$

$$P = \int\int \phi_i^*(x_1)\phi_j^*(x_2)V(x_1 - x_2)\phi_i(x_1)\phi_j(x_2)dx_1dx_2 \tag{8}$$

$$Q = \int\int \phi_i^*(x_1)\phi_j^*(x_2)V(x_1 - x_2)\phi_j(x_1)\phi_i(x_2)dx_1dx_2 \tag{9}$$

ここで E は一次摂動を取り入れたエネルギー固有値である．また P と Q の値は正であり，一粒子エネルギー固有値の間隔に比べ十分小さいと仮定する．従って，準位の入れ替えが起こらないものとする．この時，エネルギー固有値 E を求めよ．また，その固有状態の規格化された波動関数 $\psi(x_1, x_2)$ を求め，粒子の入れ替えに関する対称性について述べよ．

問 3 (3) 式で与えられたハミルトニアン $H_{\rm tot}$（ただし $V(x_1 - x_2) \neq 0$ で P と Q は正であり，準位の入れ替えは起こらないものとする）において，スピン 1/2 の同種のフェルミオンが二個入っている場合を考える．$H_{\rm tot}$ の全波動関数 Ψ は (6) 式の右辺で与えられた波動関数 $\psi(x_1, x_2)$ と二粒子のスピン波動関数 σ の積 $\Psi = \psi(x_1, x_2)\sigma$ で表される．ただし粒子 k $(k = 1, 2)$ の一粒子のスピン波動関数 $\chi_\pm^{(k)}$ は，スピン演算子 $\mathbf{S}^{(k)} = (S_x^{(k)}, S_y^{(k)}, S_z^{(k)})$ に対して固有値方程式 $(\mathbf{S}^{(k)})^2\chi_\pm^{(k)} = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_\pm^{(k)}$, $S_z^{(k)}\chi_\pm^{(k)} = \pm\frac{\hbar}{2}\chi_\pm^{(k)}$ を満たす．

(a) 基底状態の全波動関数を示せ．

(b) 第一，第二励起状態のエネルギーと全波動関数を示せ．

物理学 [IV] (答案用紙：緑)

十分長い管の中を，1種類の単原子からなる気体が一様に流れている（図1）．気流とともに動く座標系では，気体は全体として静止した熱平衡状態にあり，気体原子はMaxwell-Boltzmann 分布に従うものとする．このとき，実験室系から見ると，気体原子の速度分布は

$$f(\boldsymbol{v}) = C\exp\left\{-\frac{m}{2k_{\mathrm{B}}T}\left[(v_x-u)^2+v_y^2+v_z^2\right]\right\} \tag{1}$$

で与えられる．ここで T は気体の温度，m は気体原子の質量，$\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$ は気体原子の速度，u および C は定数，k_{B} は Boltzmann 定数で，管に沿って x 軸をとった．管の断面積は一定で，気体の密度や温度は場所によらず一定とする．

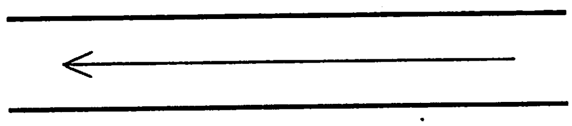

図1　管の中を気体が流れている状態

1. 以下の規格化条件より，定数 C を決めよ．(次頁下の公式に注意せよ.)

$$\int_{-\infty}^{\infty}dv_x\int_{-\infty}^{\infty}dv_y\int_{-\infty}^{\infty}dv_z f(\boldsymbol{v}) = 1 \tag{2}$$

2. 実験室系における気体原子の速度ベクトルの平均 $\langle \boldsymbol{v}\rangle$ を $f(\boldsymbol{v})$ を用いて表せ．また，それを具体的に計算せよ．

3. 実験室系における気体原子1個あたりの平均の運動エネルギー $\left\langle \dfrac{m}{2}\boldsymbol{v}^2\right\rangle$ を計算せよ．

管には2か所にシャッターが取り付けてあり，これを閉じることにより気流の通路を瞬時に遮断することができる．今，2つのシャッターを同時に閉じて，2つのシャッターと管の壁で囲まれた領域（領域A）に気体を閉じ込めた（図2）．管の壁やシャッターと気体との間に熱のやりとりはないものとする．

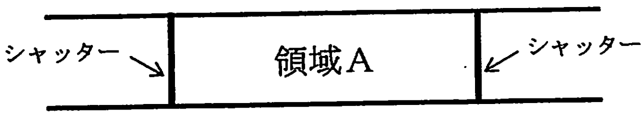

図2　シャッターが閉じられた状態．
気体は領域Aに閉じ込められている．

4. 十分時間が経過して領域Aの中の気体が熱平衡状態に達したときの気体の温度 T' を求めよ．

前頁と同じことを理想フェルミ気体で考えてみよう．まず，全体として静止した熱平衡状態にあるフェルミ気体を考える．温度 T はフェルミ温度より十分低いとする．このとき，(単位体積あたりの）フェルミ気体の全エネルギー E を温度で展開して

$$E = E_0 + \frac{1}{2}\gamma T^2 + \mathcal{O}(T^4) \tag{3}$$

と表すことができる．ここで E_0, γ は温度によらない定数である．粒子のスピンは 1/2，質量は m とする．

5. E_0 をフェルミエネルギー ε_{F} およびフェルミ粒子の数密度 n で表せ．

6. γ は ε_{F} における（単位体積あたりの）状態密度 $D(\varepsilon_{\mathrm{F}})$ を用いて

$$\gamma = \frac{\pi^2}{3}k_{\mathrm{B}}^2 D(\varepsilon_{\mathrm{F}}) \tag{4}$$

で与えられる．γ が $D(\varepsilon_{\mathrm{F}})$ に比例することを，定性的に説明せよ．

7. $D(\varepsilon_{\mathrm{F}})$ を n と ε_{F} を用いて表せ．

8. 1粒子あたりの平均エネルギーを $\varepsilon = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\gamma_1 T^2 + \mathcal{O}(T^4)$ と表したとき，ε_1 および γ_1 を ε_{F} を用いて表せ．

次に，このフェルミ気体が全体として速度 w で x 方向に流れている状況を考える（図1）．ただし $\frac{1}{2}mw^2$ は ε_{F} に比べて非常に小さいとする．気流とともに動く座標系では，フェルミ粒子は温度 T，化学ポテンシャル μ の熱平衡状態にあるものとする．

9. 実験室系から見た分布関数を，フェルミ粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$ の関数として書け．

10. 1粒子あたりの平均エネルギー（実験室系）を計算せよ．ε_1, γ_1 を用いてよい．

最後に，2つのシャッターを同時に閉じてフェルミ気体を領域Aに閉じ込める（図2）．管の壁・シャッターと気体との間に熱のやりとりはないものとする．

11. 十分時間が経過して熱平衡状態に達したときのフェルミ気体の温度 T'' を求めよ．ただし，温度 T'' においても 式 (3) のエネルギーの表式は十分正確に成り立つものとする．

（公式）

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a > 0)$$