大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士前期課程
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学　問題【Ｉ】【Ⅱ】

２０１９年8月２１日（水）９時２０分～１１時２０分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ｉ】、物理学【Ⅱ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．答案用紙は黄、赤を全員に各１枚、それに草案用紙を１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏面には何も書き込んではならない。

３．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

物理学［I］（答案用紙：黄）

図1のように原点Oを通り紙面に垂直な直線を中心軸とする半径Rの円柱に巻き付いた，質量の無視できる長さ$2\pi R$の伸び縮みしない糸がある．糸の片側は円柱上の点Sに固定されていて，もう片側には質量mの質点をつける．円柱上の点Sおよび質点の初期位置をS_0とし，質点に時刻$t=0$で動径方向に初速v_0を与え，巻きつきをほどくことを考える．途中，糸と円柱の接点をC，質点の位置をP，OSとOCのなす角$\angle$SOCをθとし，時計まわりを正とする．OS_0の方向にy軸をとり，それと直交する方向にx軸をとる。接点から質点まで糸はたるむことはないとし，ほどけるまでの運動を考える．重力などのポテンシャルはないとして以下の問いに答えよ．

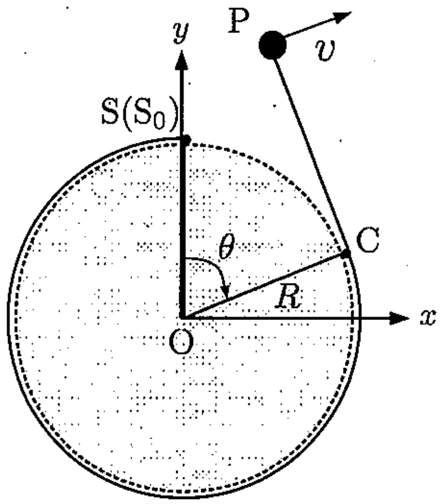

図 1: 固定された円柱

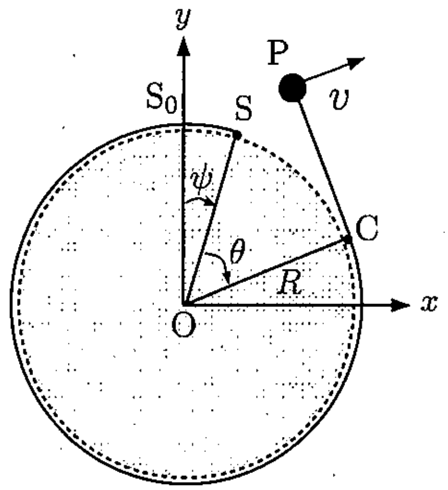

図 2: 回転できる円柱

まず，円柱は固定されていて，回転しない場合を考える（図1参照）．

問 1.　接点Cの位置ベクトルを$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(R\sin\theta, R\cos\theta)$と表すとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$を求め，質点の位置ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$を求めよ．

問 2.　時刻$t>0$での質点の速度$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\mathrm{d}t}=(v_x, v_y)$について，$v_x$, v_yをθ, $\dot{\theta}$, Rで表わせ．ただし，$\dot{\theta}$はθの時間微分とする．

問3.　系のラグランジアン $\mathcal{L}=\frac{m}{2}|\vec{v}|^2$ を $m,\ R,\ \theta$ および $\dot{\theta}$ を用いて表わせ．題意からポテンシャルはないとしてよい．

問4.　θ についてのオイラー・ラグランジュ方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right)=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$ を求めよ．

問5.　問4で得られた方程式を解き，θ が t の関数として

$$\theta(t)=\sqrt{2\frac{v_0}{R}t}$$

となることを示せ．

問6.　点Oまわりの質点の角運動量の大きさを求めよ．角運動量は保存するかどうか，理由をつけて答えよ．

問7.　質点の運動エネルギーは保存するかどうか，理由をつけて答えよ．

次に，円柱が中心軸まわりに摩擦無く回転できる場合を考える（図2参照）．前問までと同様，時刻 $t=0$ で初期位置 $\mathrm{S_0}$ にある質点に，動径方向に初速 v_0 を与え，巻きつきをほどくことを考える．角 $\angle \mathrm{S_0OS}$ を ψ とし，時計まわりを正とする．円柱の中心軸回りの慣性モーメントを $I\ (>0)$ とし，初期時刻 $t=0$ で円柱は静止していたとして，以下の問いに答えよ．

問8.　$\theta,\ \dot{\theta},\ \dot{\psi}$ および $m,\ R,\ I$ を用いて系のラグランジアンを求めよ．ただし $\dot{\psi}$ は ψ の時間微分とする．題意よりポテンシャルはないとしてよく，運動エネルギーは円柱の回転運動エネルギーと質点の並進運動エネルギーの和で与えられるとする．

問9.　θ および ψ についてのオイラー・ラグランジュ方程式を求めよ．

問10.　ψ についてのオイラー・ラグランジュ方程式より，保存量を求めよ．

問11.　$\dot{\theta}>0$ であることに注意して，円柱はどちらへ回転（時計まわり，または反時計まわり）するか，理由をつけて答えよ．

問12.　質点の運動エネルギーは保存するかどうか，理由をつけて答えよ．

物理学［II］（答案用紙：赤）

半径 a の円形導線を流れる円電流を考える．導線の太さは無視でき，電流は常に一定値 I に保たれるように調節されている．円形導線は，その中心が座標原点に一致するように，xy 平面内に固定されている．円形導線上の任意の点Pの位置を，位置ベクトル $\boldsymbol{s}$，あるいは x 軸から測った角度 φ で表す（図１）．以下の問いに答えよ．ただし，電流素片 $Id\boldsymbol{s}$ が磁場 $\boldsymbol{B}$ から受ける力は

$$d\boldsymbol{F} = Id\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}$$

で与えられることを用いてよい．重力，空気抵抗，および円電流のつくる磁場は無視する．また，円形導線は，力などを受けても変形しないとする．ベクトル量については，向きと大きさが分かるように（たとえば成分表示で）解答せよ．

問１ 図２に示すように，空間的に一様な静磁場が x 軸方向にかけられている状況を考える．すなわち，B_0 を定数として，$\boldsymbol{B} = (B_0, 0, 0)$ とする．

(a) 円形導線の微小部分 $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ に働く力 $d\boldsymbol{F}$ による，原点まわりの力のモーメント（トルク）$d\boldsymbol{N} = \boldsymbol{s} \times d\boldsymbol{F}$ を求めよ．

(b) (a) の結果を積分することにより，円形導線全体に働くトルク $\boldsymbol{N}$ を求めよ．

(c) 一般に，磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ は，磁場 $\boldsymbol{B}$ のもとでトルク $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$ を受ける．このことと (b) の結果から，今考えている円電流と等価な磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ を，I と a を用いて表せ．

(d) つぎに，円形導線の固定をそっと解除したところ，ある軸のまわりに回転運動を始めた．その回転運動について最も適切なものを以下の (1)～(4) から１つ選べ．

(1) x 軸のまわりに一定方向に回転しつづける．
(2) y 軸のまわりに一定方向に回転しつづける．
(3) x 軸のまわりに振動する回転運動を行う．
(4) y 軸のまわりに振動する回転運動を行う．

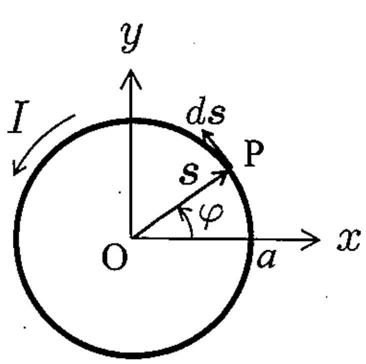

図１

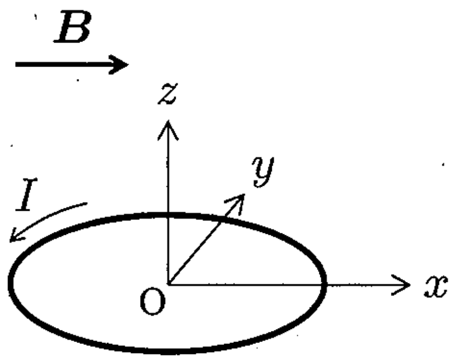

図２

問2 図3に示すように，大きさが座標xに線形に依存する静磁場が，z軸方向にかけられた状況を考える．すなわち，B_0, B_1を定数として$\boldsymbol{B}=(0,0,B_0+B_1x)$とする．前問と同様に，円形導線は，中心が座標原点に一致するように，xy平面内に固定されている．

(a) 円形導線の微小部分$[\varphi,\varphi+d\varphi]$に働く力$d\boldsymbol{F}$を求めよ．

(b) (a)の結果を積分することにより，円形導線全体に働く力$\boldsymbol{F}$を求めよ．

つぎに，時刻$t=0$において，円形導線の固定をそっと解除した．以下では$t\geq 0$とする．

(c) 時刻tにおける円形導線の中心の位置を求めよ．ただし，円形導線の全質量をMとする．

(d) 時刻tにおいて円形導線に誘起される逆起電力を求めよ．

(e) 冒頭に記したように，円電流は一定に保たれている．(d)で求めた逆起電力に抗して電流値を一定に保つために必要な電気エネルギーを，時刻tまでの積分値として求めよ．

(f) 時刻tに円形導線がもつ運動エネルギーを求め，(e)の結果と比較せよ．

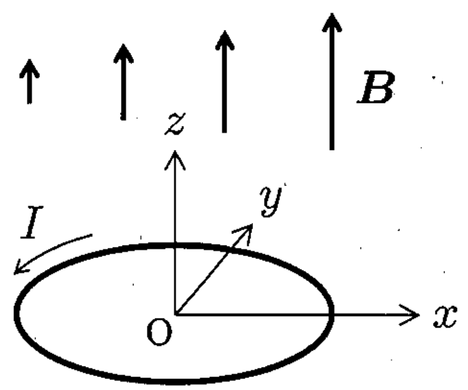

図3

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士前期課程
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学　問題【Ⅲ】【Ⅳ】

２０１９年８月２１日（水）１３時００分～１５時００分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ⅲ】、物理学【Ⅳ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．答案用紙は青、緑を全員に各１枚、それに草案用紙を１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏面には何も書き込んではならない。

３．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

物理学 [III] (答案用紙：青)

外場として導入した一様電場 (以下、外部電場) の中にある水素原子を考える。外部電場の大きさは $E_{\rm ex}$、その向きは z 軸正の方向とする。

外部電場がない時の水素原子のハミルトニアン演算子は次の通りである。

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

陽子は電子に比べ十分重く、原点で静止しているとする。$\hat{\boldsymbol{p}}$ は電子の運動量演算子、$\boldsymbol{r}$ は電子の位置で $r(\equiv\sqrt{|\boldsymbol{r}|^2})$ は電子の陽子からの距離、μ は電子の質量、e は素電荷、ϵ_0 は真空の誘電率である。このハミルトニアン演算子のエネルギー固有値 E_n およびその規格化された固有波動関数 $\Psi_{nlm}(\boldsymbol{r})(\equiv|n,l,m\rangle)$ は次の通り与えられる。

$$E_n = -\frac{1}{2}\mu\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2\frac{1}{n^2}$$

$$\Psi_{nlm}(\boldsymbol{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$$

ここで極座標 (r,θ,ϕ) を用いている。$R_{nl}(r)$、$Y_{lm}(\theta,\phi)$ はそれぞれ動径方向の波動関数、球面調和関数であり、n は主量子数、l は軌道角運動量量子数、m は軌道磁気量子数である。また、プランク定数を h とした時、$\hbar$ は $\hbar\equiv h/(2\pi)$ である。

以下の問いに答えよ。なお、以下の問１から問３まで、電子及び陽子のスピンは簡単のために無視してよい。

問１ 外場電場によって水素原子のハミルトニアン演算子 $\hat{H}_0$ に加わるハミルトニアン演算子 $\hat{H}_A$ を与えよ。簡単のため、外部電場の静電ポテンシャルを原点 $(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0})$ でゼロにとること。

問２ 外場電場中の基底状態の水素原子のエネルギー固有値を考える。外部電場がなかった時に比べその変化は、$E_{\rm ex}$ が十分に小さい時 $E_{\rm ex}^2$ に比例する。$E_{\rm ex}$ に比例する成分がないことを示せ。

問３ 外場電場中の励起状態にある水素原子を考える。以下では簡単のため、主量子数が $n=2$ である状態に注目し、他の主量子数の状態 $(n\neq 2)$ を無視して良い。次の問いに答えよ。

(a) 外部電場がない時、$n=2$ の状態の縮退度を述べよ。また、$n=2$ のそれぞれの状態の量子数 (l,m) を答えよ。

(b) 空間反転 $(\boldsymbol{r}\to-\boldsymbol{r})$ の下で、波動関数 $\Psi(\boldsymbol{r})$ が $+\Psi(\boldsymbol{r})$ となるものを偶パリティ、$-\Psi(\boldsymbol{r})$ となるものを奇パリティという。外部電場がない時、問３ (a) で答えた $n=2$ の全ての状態を偶パリティ、奇パリティで分類せよ。

(c) 外場電場中の水素原子の全ハミルトニアン演算子 $\hat{H} \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}_A$ で与えられる系で保存する量子数を全てあげよ。またその理由を述べよ。

(d) $\hat{H}_A$ を摂動として扱い、$n = 2$ の全ての状態のエネルギー固有値を $\hat{H}_A$ の一次までで求めよ。なお、解答において、ゼロでない行列要素に対して $\langle 2, l', m'|\hat{H}_A|2, l, m\rangle$ を使って答えてよく、それらを具体的に評価する必要はない。

問4 次に、電子のスピンと電場の相互作用を考える。この時、水素原子の全ハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ には次の項が加わる。

$$\hat{H}_B = \hat{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

ここで、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は電子の位置における電場であり、外部電場及び陽子の電荷から導かれる電場の両方の寄与がある。$\hat{\boldsymbol{d}}$ は電子のスピン演算子に比例し、その比例係数は実定数である。また、規格化された電子のスピン波動関数およびそのエルミート共役をそれぞれ χ と $\chi^\dagger$ とした時、$\chi^\dagger \hat{\boldsymbol{d}} \chi \equiv \boldsymbol{d}$ とおく。外場電場中の水素原子の全ハミルトニアン演算子を $\hat{H} \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}_A + \hat{H}_B$ とし、以下の問いに答えよ。なお、$\boldsymbol{d}$ を微小量として扱い、それに伴い $\hat{\boldsymbol{d}}$ は微小量に比例しているとして、それぞれの一次までで考えよ。

(a) 外部電場がない時、次式が成り立つことを示せ。ただし、[,]は交換子を表す。

$$\hat{H}_B = \frac{i}{e\hbar}[\hat{\boldsymbol{d}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}_0]$$

(b) 外部電場がない時、ハミルトニアン演算子 $\hat{H}_0 + \hat{H}_B$ で与えられる水素原子の基底状態の波動関数は次の $|G\rangle$ で近似できる。

$$|G\rangle \equiv (1 + \frac{i}{e\hbar}\hat{\boldsymbol{d}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})\Psi_{100}(\boldsymbol{r})\chi \qquad (1)$$

$\hat{H}_0 + \hat{H}_B$ を $|G\rangle$ に作用させ、基底状態のエネルギー固有値を求めよ。

(c) 式 (1) を使って $\langle G|\boldsymbol{r}|G\rangle$ を評価し、その結果を $\boldsymbol{d}$ を用いて表せ。

(d) 外部電場がある時、$|G\rangle$ で近似した基底状態にある水素原子の全エネルギーを評価し、外部電場がないときと比べてその変化を求めよ。なお、外部電場を一次の摂動として扱うこと。

物理学［IV］（答案用紙：緑）

問1. 温度 T の熱浴に接している質量 m、固有角振動数 ω をもつ調和振動子について考える。以下の問いに答えよ。

(a) 1個の振動子がある場合を考える。その古典的なエネルギーは、座標を q、それに共役な運動量を p とした時、

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

で与えられる。古典的分配関数 $Z_{cl}^{(1)}(\omega)$ を計算せよ。ボルツマン定数は k_B とする。必要なら次の公式を利用してもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

(b) 1個の振動子がある場合を考える。その量子論的なエネルギーはゼロ点エネルギーを無視すると、

$$E_n = n\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

で与えられる。ここで $\hbar = h/(2\pi)$ で、h はプランク定数である。量子論的分配関数 $Z_q^{(1)}(\omega)$ を計算せよ。以降の計算でも振動子のゼロ点エネルギーは簡単のため無視することにする。

(c) 独立な N 個の振動子がある時、その古典的分配関数を求め、ヘルムホルツ自由エネルギーと内部エネルギーを計算せよ。

(d) 独立な N 個の振動子がある時、その量子論的分配関数を求め、ヘルムホルツ自由エネルギーと内部エネルギーを計算せよ。

(e) (c) および (d) の結果を用いて、古典的および量子論的熱容量を計算せよ。さらに古典的および量子論的な熱容量を温度の関数として同じグラフに描け。その際に、両者の違いが分かるようにし、かつ高温極限と低温極限の値も書き込め。

問2. 一辺がLの立方体（体積$V=L^3$）の箱があって、温度Tの熱浴に接している。箱の中には電磁波が存在し、外界と熱平衡にあるとする。その電磁波は、様々な固有角振動数を持つ互いに独立な調和振動子の集まりと考えられる。振動子は量子統計に従い、以下の計算ではゼロ点エネルギーの寄与は無視することにする。以下の問いに答えよ。

(a) 角振動数がωと$\omega+d\omega$（$d\omega$は微小量とする）の間にある振動子の個数を$g(\omega)d\omega$とする。この系全体の分配関数をZ_Rとする。$\log Z_R$を、$g(\omega)$および問1(b)で導入した$Z_q^{(1)}(\omega)$を用いて表せ。

(b) 電磁波の固有振動は、マクスウェル方程式に適切な境界条件を課すことで決まる。ここではそのように決まる電磁波の固有角振動数ωは、以下のベクトル

$$\vec{k}=(k_x,k_y,k_z)=\frac{\pi}{L}(n_x,n_y,n_z)\qquad (n_x,n_y,n_z=0,1,2,\cdots)$$

を使って$\omega=|\vec{k}|c$で与えられるとする。ここでcは光速である。Lが十分大きいとして$g(\omega)$は

$$g(\omega)=\frac{V}{\pi^2c^3}\omega^2$$

で与えられることを示せ。

(c) この系のヘルムホルツ自由エネルギーF_R、内部エネルギーU_R、輻射圧P_Rを求めよ。必要なら次の公式を利用してもよい。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},\quad \log(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\qquad(-1\leq x<1)$$

(d) 角振動数がωと$\omega+d\omega$の間にある振動子の単位体積あたりのエネルギー（エネルギー密度）の期待値を$\mathcal{E}(\omega)d\omega$とする。$\mathcal{E}(\omega)$を求めよ。

(e) 温度Tにおける$\mathcal{E}(\omega)$の概形を、ωの関数としてグラフに描け。また、$\mathcal{E}(\omega)$が最大になるωの値を、方程式

$$x+\log\left(1-\frac{x}{3}\right)=0$$

のゼロでない解x_0 ($x_0\simeq 2.8$)を用いて表せ。