２０２６年度名古屋大学大学院理学研究科
博士前期課程入学試験

出題の意図及び正解・解答例

領域名：物理科学領域

試験科目名：物理学・外国語

実施日：２０２５年８月２０日（水）

出題の意図

物理学に関する基礎的な知識と総合的な理解力、外国語（英語）の読解力と作文能力を問う。

一般選抜　物理科目　問題Ⅰ　正解・解答例

問１

おもり１の運動エネルギー

$$\frac{1}{2}m(l-r)^2\dot{\theta}^2$$

位置エネルギー

$$mg(l-r)(1-\cos\theta)$$

おもり２の運動エネルギー

$$\frac{1}{2}m\,(l+r)^2\dot{\theta}^2$$

位置エネルギー

$$mg(l+r)(1-\cos\theta)$$

問２

２つのおもりの重心の運動エネルギー

$$m\dot{\theta}^2 l^2$$

問３

２つのおもりの回転エネルギー

$$m\dot{\theta}^2 r^2$$

問４

この系のオイラー・ラグランジュ方程式

$$2m\left(l^2+r^2\right)\ddot{\theta} = -2mgl\sin\theta$$

問５

微小振動する時の振動数

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gl}{l^2+r^2}}$$

問６

円筒Ａの慣性モーメント I_A

$$I_A = \int_0^{2\pi} R^2\, dm = R^2 \int_0^{2\pi} dm = \ mR^2$$

問７

円筒Ａの重心の運動エネルギー

$$\frac{1}{2}m(3R)^2\dot{\theta}^2$$

問８

円筒Ａの回転エネルギー

$$\frac{9}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

問９

円筒Ａのラグラジアン

$$L = 9\, mR^2\dot{\theta}^2 - 3mgR(1-\cos\theta)$$

問１０

オイラー・ラグランジュ方程式

$$18mR^2\ddot{\theta} \ = -3mgR\sin\theta$$

問１１

円筒Ａの振動数

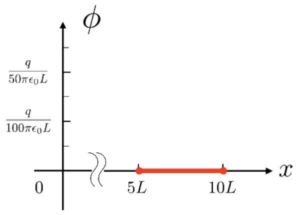
$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{6R}}$$

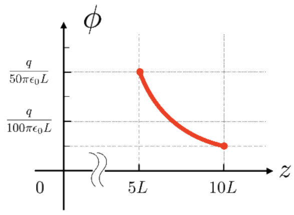
一般選抜　物理科目　問題 II　正解・解答例

問 1　$\phi = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$

問 2　$\phi(x, y, z) \simeq \dfrac{2qL}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{z}{r^3}$

問 3





問 4　$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z),\quad E_x = 3\dfrac{2qL}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{zx}{r^5},\quad E_y = 3\dfrac{2qL}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{zy}{r^5},\quad E_z = \dfrac{2qL}{4\pi\epsilon_0}\left(-\dfrac{1}{r^3} + 3\dfrac{z^2}{r^5}\right)$

問 5　$\phi(\vec{r}) = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

問 6　$\phi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_{\vec{r}\,'\in V} d^3r'\,\dfrac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$

問 7　$\phi(\vec{r}) \simeq \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \dfrac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

問 8　$Q_+ = q,\quad Q_- = -q,\quad Q = 0$

問 9　$\vec{q} = (0, 0, qa)$

問 10　Q は全電荷を表す。$\vec{q}$ は電気双極子モーメントを表す。

一般選抜　物理科目 III　正解・解答例

問 1

問 1-1 演算子 $\hat{F}$ と内積の定義より，

$$
\begin{aligned}
(\phi, \hat{F}\psi) &= \int dx \phi^*(x) \left(-\frac{d\psi(x)}{dx}\right) \\
&= \Big[\phi^* \psi\Big]_{-\infty}^{\infty} + \int dx \frac{d\phi^*(x)}{dx}\psi(x) \\
&= \int dx \left(\frac{d}{dx}\phi(x)\right)^* \psi(x) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\phi, \psi\right).
\end{aligned}
$$

ここで，2 行目では部分積分を行い，3 行目では波動関数に対する境界条件を用いた．この結果とエルミート共役の定義，$(\phi, \hat{F}\psi) = (\hat{F}^\dagger \phi, \psi)$ とを比べて，

$$
\hat{F}^\dagger = \frac{d}{dx}.
$$

問 1-2 微分演算子として，$\hat{F}^\dagger \hat{F} = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ であるから，部分積分を繰り返し行うと，

$$
\begin{aligned}
(\phi, \hat{F}^\dagger \hat{F}\psi) &= \int dx \phi^*(x) \left(-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\right) \\
&= \left[\frac{d\phi^*}{dx}\psi - \phi^* \frac{d\psi}{dx}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int dx \left(-\frac{d^2\phi^*(x)}{dx^2}\right)\psi(x) \\
&= \int dx \left(-\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}\right)^* \psi(x).
\end{aligned}
$$

ここで，3 行目では波動関数についての境界条件を用いた．この結果とエルミート共役の定義を比べることで，$\hat{F}^\dagger \hat{F}$ はエルミート演算子であることが分かる．

問 1-3 $\hat{Q}\psi = q\psi$ であるから，内積の定義に注意して，

$$
(\psi, \hat{Q}\psi) = (\psi, q\psi) = q(\psi, \psi), \quad (\hat{Q}\psi, \psi) = (q\psi, \psi) = q^*(\psi, \psi),
$$

が成り立つ．一方，$\hat{Q}$ のエルミート性より $(\psi, \hat{Q}\psi) = (\hat{Q}\psi, \psi)$ であるから，$q = q^*$ が成り立つ．よって q は実数でなければならない．

問 1-4 $\hat{Q}$ のエルミート性を用いると，

$$
q_j(\psi_i, \psi_j) = (\psi_i, \hat{Q}\psi_j) = (\hat{Q}\psi_i, \psi_j) = q_i^*(\psi_i, \psi_j) = q_i(\psi_i, \psi_j).
$$

辺々引き算して

$$
0 = (q_j - q_i)(\psi_i, \psi_j).
$$

よって，$q_j \neq q_i$（$i \neq j$）のとき，$(\psi_i, \psi_j) = 0$ が成り立つので，ψ_i と ψ_j は直交する．

問 2

問 2-1

$$(1) \qquad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \frac{m\omega}{2\hbar}\left([\hat{x}, \hat{x}] - \frac{i}{m\omega}[\hat{x}, \hat{p}] + \frac{i}{m\omega}[\hat{p}, \hat{x}] + \frac{1}{m^2\omega^2}[\hat{p}, \hat{p}]\right) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{x}, \hat{p}] = 1$$

$$(2) \qquad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{N}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{a}^\dagger(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \hat{a}^\dagger[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$$

問 2-2 $\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ の定義より，$\hat{x} = \sqrt{\hbar/2m\omega}\cdot(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)$，$\hat{p} = -i\sqrt{\hbar m\omega/2}\cdot(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)$．これを $\hat{H}_0$ の表式に代入して，

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ &= \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

ここで，2 行目では交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を用いた．

問 2-3 問 2-1(2) より，$\hat{N}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{N} + \hat{a}^\dagger$．これと，$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ を用いて，

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (\hat{a}^\dagger\hat{N} + \hat{a}^\dagger)|n\rangle = \hat{a}^\dagger(\hat{N}+1)|n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle$$

したがって，$\hat{a}^\dagger|n\rangle$ は $|n+1\rangle$ に比例する．規格化定数を c として，$\hat{a}^\dagger|n\rangle = c|n+1\rangle$ とおくと，

$$|c|^2 = |c|^2\langle n+1|n+1\rangle = \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \langle n|(1+\hat{a}^\dagger\hat{a})|n\rangle = (n+1)\langle n|n\rangle = n+1 \implies c = \sqrt{n+1}\,.$$

よって，$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$．

問 2-4

$$0 = \langle x|\hat{a}|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\langle x|\hat{x}|0\rangle + \frac{i}{m\omega}\langle x|\hat{p}|0\rangle\right) \implies \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\psi_0(x) + x\psi_0(x) = 0$$

この微分方程式を積分して，

$$\psi_0(x) = Ce^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

積分定数 C は，規格化条件より，

$$1 = \|\psi_0\|^2 = |C|^2\int dx e^{-m\omega x^2/\hbar} = |C|^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \implies C = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$$

と定まる．よって，基底状態の波動関数は，

$$\psi_0 = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}\,e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

問 3

問 3-1 問 2 で与えられた定義式より，$\hat{x} = \sqrt{\hbar/2m\omega}\cdot(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)$．**問 2-1** の交換関係と $\hat{N}$ の定義式を用いて，

$$\begin{aligned}\hat{x}^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right) \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(2\hat{N} + 1 + \hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right)\,.\end{aligned}$$

問 2-3 の結果 $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$，および $\hat{a}$ についての同様の関係式 $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ より，$\langle n|\hat{a}\hat{a}|n\rangle \propto \langle n+1|n-1\rangle = 0$，$\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger|n\rangle \propto \langle n-1|n+1\rangle = 0$ に注意すると，求めたい 1 次補正項は，

$$\begin{aligned}E_n^{(1)} = \langle n|\beta\hat{x}^2|n\rangle &= \frac{\hbar\beta}{2m\omega}\left\{\langle n|\left(2\hat{N}+1\right)|n\rangle + \langle n|\hat{a}\hat{a}|n\rangle + \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger|n\rangle\right\} \\ &= \frac{\hbar\beta}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)\,.\end{aligned}$$

問 3-2

(1) $\hat{H}$ は，$\hat{H}_0$ のポテンシャル項を，

$$\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \implies \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \beta\hat{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(1+\lambda)\hat{x}^2$$

と置き換えたものになる．したがって，$\hat{H}$ は，$\hat{H}_0$ において $\omega \to \sqrt{1+\lambda}\omega$ とお置き換えたものに等しい．よって，$\hat{H}$ に対する固有値 E_n は，$\hat{H}_0$ の固有値 $E_n^{(0)}$ で $\omega \to \sqrt{1+\lambda}\omega$ お置き換えて，

$$E_n = \sqrt{1+\lambda}\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

(2) 小さなパラメーター λ に対する展開式 $\sqrt{1+\lambda} \simeq 1 + \frac{1}{2}\lambda + \cdots$ を用いて，

$$\begin{aligned} E_n &= \sqrt{1+\lambda}\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \\ &\simeq \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\beta}{m\omega^2}\cdot\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \cdots \end{aligned}$$

展開の第 1 項は，$\hat{H}_0$ の固有値 $E_n^{(0)}$ そのもの，展開の第 2 項は 1 次摂動の結果 $E_n^{(1)}$ と一致する．

問 4

問 4-1 与えられた積分公式を用いると（$\langle\psi_\gamma|\psi_\gamma\rangle = 1$ に注意して），

$$\begin{aligned} E_\gamma = \frac{\langle\psi_\gamma|\hat{H}_0\psi_\gamma\rangle}{\langle\psi_\gamma|\psi_\gamma\rangle} &= \langle\psi_\gamma|\hat{H}_0\psi_\gamma\rangle \\ &= (\gamma/\pi)^{1/2}\int dx e^{-\gamma x^2/2}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\right)e^{-\gamma x^2/2} \\ &= \frac{\hbar^2\gamma}{4m} + \frac{m\omega^2}{4\gamma}. \end{aligned}$$

問 4-2

$$\frac{dE_\gamma}{d\gamma} = \frac{\hbar^2}{4m} - \frac{m\omega^2}{4\gamma^2} = 0 \implies \gamma = \frac{m\omega}{\hbar}$$

よって，

$$E_\gamma = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad \psi_\gamma = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}e^{-m\omega x^2/2\hbar},$$

となり，基底状態の固有値 $E_0^{(0)}$（問 3），および波動関数 $\psi_0(x)$（問 2-4）に一致する結果が得られた．

一般選抜　物理科目　問題 IV　正解・解答例

問 1 **(a)** $Z = (e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon})^N$

(b) $U = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = -N\varepsilon \tanh(\beta\varepsilon)$

(c) $C = \dfrac{\partial U}{\partial T} = \dfrac{N\varepsilon^2}{k_B T^2} \dfrac{1}{\cosh^2(\beta\varepsilon)}$

(d) $F = -Nk_B T \ln\left[2\cosh(\beta\varepsilon)\right]$

(e) $S = -\dfrac{\partial F}{\partial T} = Nk_B\left[-\beta\varepsilon\tanh(\beta\varepsilon) + \ln(2\cosh(\beta\varepsilon))\right]$

(f) $\Delta E^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial\beta^2} = \frac{N\varepsilon^2}{\cosh^2(\beta\varepsilon)}$

(g) $\langle N_+ \rangle = N\dfrac{e^{-\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}}$

(h) $\Delta {N_+}^2 = \frac{N}{4}\frac{1}{\cosh^2(\beta\varepsilon)}$

問 2 **(a)** $\Delta S = Nk_B\left[-\beta\varepsilon\tanh(\beta\varepsilon) + \ln(\cosh(\beta\varepsilon))\right]$

(b) 系から外界へ逃げた熱は $Q = -N\varepsilon\tanh(\beta\varepsilon)$ であるから、

$$\Delta S - \frac{Q}{T} = Nk_B \ln(\cosh(\beta\varepsilon))$$

である。これは任意の $\beta\varepsilon$ に対して正である。ゆえに第 2 法則が成立することが示された。

問 3 **(a)** 準静的等温過程における仕事 W はヘルムホルツの自由エネルギーの差であるから、

$$W = -Nk_B T \ln\left[\frac{\cosh(2\beta\varepsilon)}{\cosh(\beta\varepsilon)}\right]$$

(b) 準静的断熱過程だから、過程前のそれぞれの準位にいた粒子の数は過程後も変化しない。ゆえに過程前後のエネルギーの差、つまり系が外界にする仕事 W は、

$$W = -N\varepsilon\tanh(\beta\varepsilon)$$

となる。また最小仕事の原理により、(a) の W のほうが小さい。一方、(a) と (b) の仕事はともに負だから、仕事の大きさで比較すると、(a) の $|W|$ のほうが大きい。

(c) エントロピー S は $\beta\varepsilon$ の関数であるから、ε が 2 倍になれば、T は 2 倍に増加する。

一般選抜　外国語 正解・解答例

Q1) C

Q2) D

Q3) B

Q4) エ

Q5) B

Q6) To prevent global warming, the use of such clean energy sources is becoming increasingly important.

Q7) これらの考えは、物理学が単に実験室やロケット科学のためだけのものではなく、宇宙旅行から気候変動に至るまで、現実の問題を解決するために私たちが活用できる道具であることを示している。