大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士前期課程

理学専攻　物理科学領域

物理学　問題　【 Ⅰ 】【 Ⅱ 】

2025 年 8 月 20 日（水）　9 時 20 分～11 時 20 分

受験上の注意

1. この冊子には物理学【Ⅰ】、物理学【Ⅱ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

2. 答案用紙は黄、赤を全員に各１枚、それに草案用紙を１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏側には何も書き込んではならない。

3. 答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

図1のように剛体棒が原点 O につながれている．剛体棒は O のまわりを xz 平面内で自由に動ける．剛体棒には質量 m の二つのおもり1と2が取り付けられている．おもり2は棒の先端に固定されており，おもり1はより原点 O に近いところに固定されている．おもり1とおもり2の距離は$2r$とする．原点から2つのおもりの中点までの長さを l とする．剛体棒が鉛直下方となす角をθとして xz 平面内を振動する．剛体棒の重さとおもりの大きさは無視できる．重力加速度の大きさを g とする．問1から問5では $g, m, l, r, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ のうち適切なものを用いて表せ．空気抵抗は無視せよ．

問1 おもり1の運動エネルギーと位置エネルギーを記せ．同様に，おもり2の運動エネルギーと位置エネルギーを記せ．但し，位置エネルギーは $\theta = 0$ の位置を基準とせよ．

問2 2つのおもりの重心の運動エネルギーを記せ．

問3 2つのおもりの重心まわりの回転のエネルギーを記せ．

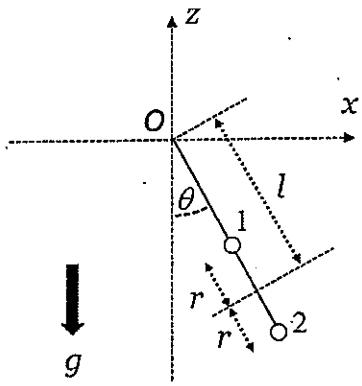

図1

問4 この系のオイラー・ラグランジュ方程式を導け．

問5 剛体棒が微小振動 ($|\theta| \ll 1$) する時の振動数を記せ．

図2のように円筒Aが，円筒Bの中で静止している．この時の，円筒A表面上の円筒Bとの接触箇所を p とする．円筒の厚みは無視できる．重力加速度の大きさを g とする．円筒Aの半径を R，質量を m，円筒Bの半径を $4R$ とする．円筒 B の中心を原点 O とする．

問6 円筒Aの中心軸のまわりの，円筒 A の慣性モーメント I_A を記せ．

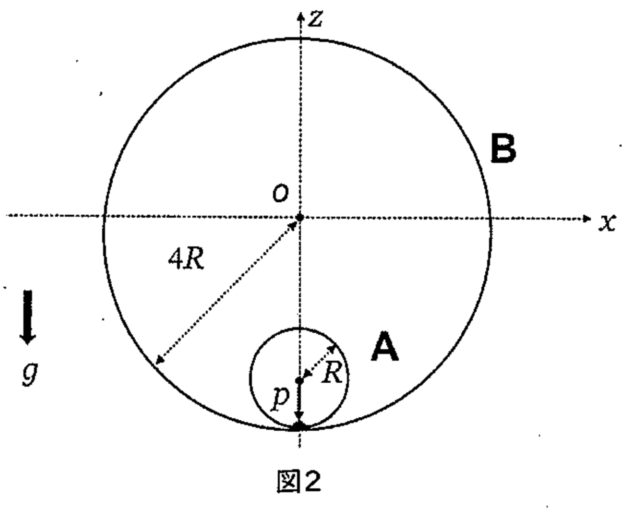

図2

次に，円筒Aが円筒B上を滑らずに転がり運動する場合を考える．円筒Bは動かないものとする．図3に示すように，原点 O と円筒Aの中心を結ぶ線と，鉛直下方とのなす角度を θ とする．問7から問11では $g, m, R, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ のうち適切なものを用いて表せ．空気抵抗と，転がり抵抗は無視せよ．

問7　円筒Aの重心の運動エネルギーを記せ．

問8　円筒Aが回転し，点 p が図3のように移動した場合を考える．角度 α を図3のように定義する．$R\cdot(\alpha+\theta)=4R\cdot\theta$ となることがわかる． α や $\dot{\alpha}$ を用いずに，円筒Aの中心軸まわりの回転エネルギーを記せ．

問9　円筒Aのラグランジアンを記せ．

問10　オイラー・ラグランジュ方程式を記せ．

問11　円筒Aの微小振動 ($|\theta| \ll 1$) を考える．円筒Aの振動数を記せ．

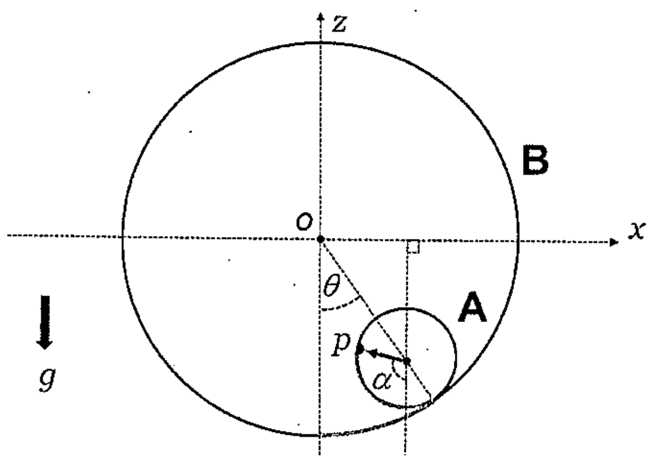

図3

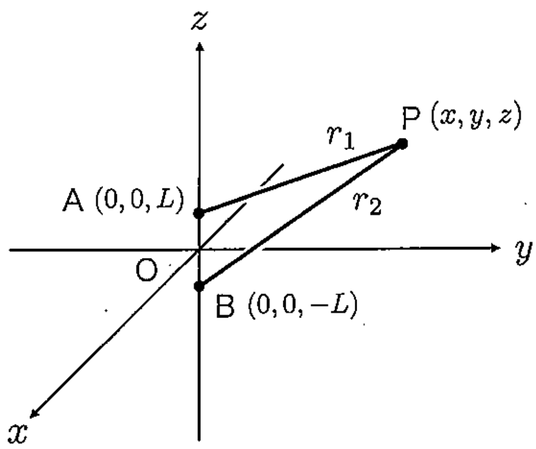

図1

図1のように真空の空間の z 軸上の $z = L$ の点Aに点電荷 $+q$、$z = -L$ の点Bに点電荷 $-q$ が固定されている。ここで L、q は正の定数とする。真空の誘電率を ϵ_0 とする。以下の問いに答えよ。

問1　点Pの座標を (x, y, z) とし、その位置ベクトルを $\vec{r} = (x, y, z)$、位置ベクトルの大きさを $r\ (= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ で表す。AP間の距離を r_1、BP間の距離を r_2 とした時、点A、点Bにある2つの点電荷による点Pでの静電ポテンシャル ϕ を r_1、r_2 を使って表せ。

問2　点Aおよび点Bに比べて、点Pは原点Oから遠く離れており、$\dfrac{L}{r} \ll 1$ であるものとする。$\dfrac{1}{r_1}$ および $\dfrac{1}{r_2}$ は、$\dfrac{L}{r}$ の2次以上の高次の項を無視するものと近似して

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2Lz}{r^2} + \frac{L^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{Lz}{r^2}\right)$$
$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{2Lz}{r^2} + \frac{L^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{Lz}{r^2}\right)$$

とする。この近似を用いて、L、点Pの座標の x、y、z、および $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ を使って点Pでの静電ポテンシャル ϕ を表せ。

問3　前問で求めた $\dfrac{L}{r} \ll 1$ の場合の静電ポテンシャルを考えた時、以下の問いに答えよ。

(a)　点Pが x 軸上にある時、図2にならって $5L \leq x \leq 10L$ の領域の静電ポテンシャル ϕ の概形を x の関数として書け。

(b)　点Pが z 軸上にある時、図2にならって $5L \leq z \leq 10L$ の領域の静電ポテンシャル ϕ の概形を z の関数として書け。

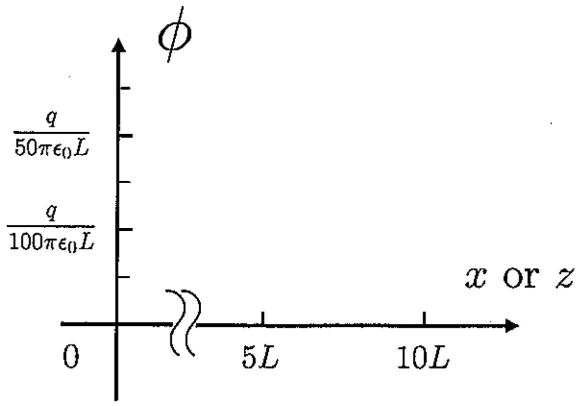

図2

問4 問**2**で求めた静電ポテンシャルから、点Pでの電場 $\vec{E}$ を求めよ。

問5 点電荷 $-q$ のある点Bから点電荷 $+q$ のある点Aに向かうベクトルを $\vec{D}$ とすると

$$\vec{D} = 2L\vec{e}_z$$

と表される。ここで $\vec{e}_z$ は z 軸正方向を向く単位ベクトルである。電気双極子モーメント $\vec{p}$ は

$$\vec{p} = q\vec{D}$$

で表される。問**2**で求めた静電ポテンシャルを、$\vec{p}$ と点Pの位置ベクトル $\vec{r}$ の内積を使って表せ。

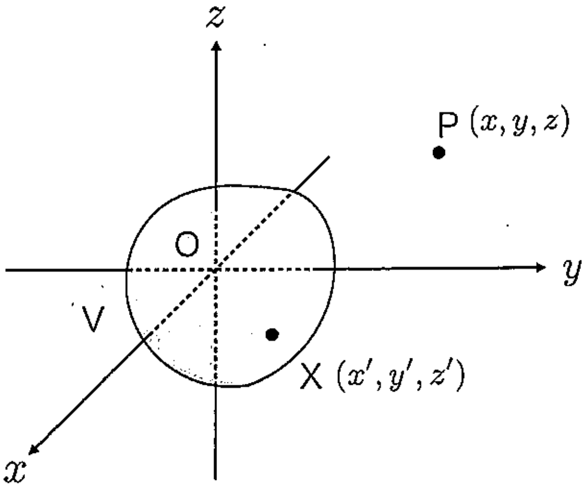

図3

次に、図3のように真空の空間の原点O付近にある領域Vを考える。領域Vには電荷が分布している。この電荷分布は時間変化しない。領域Vの中にある点Xの座標を(x', y', z')とし、その位置ベクトルを$\vec{r}\,' = (x', y', z')$とした時、点Xでの電荷密度を$\rho(\vec{r}\,')$とする。以下の問いに答えよ。

問6　点Pの座標を(x, y, z)とし、その位置ベクトルを$\vec{r} = (x, y, z)$で表す。点Pにおける静電ポテンシャル$\phi(\vec{r})$を電荷密度$\rho(\vec{r}\,')$を使って表せ。

問7　原点Oから点Pまでの距離$r(=|\vec{r}|)$は、原点Oから電荷が分布している点Xまでの距離$r'(=|\vec{r}\,'|)$に比べて十分大きいとする。つまり$r \gg r'$とする。この時、前問で求めた静電ポテンシャル$\phi(\vec{r})$を微小量$\dfrac{r'}{r}$で展開して、$\dfrac{r'}{r}$の2次以上の高次の項は無視できる。つまり

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}\,'}{r^2}\right)$$

と近似できるものとする。その時の静電ポテンシャル$\phi(\vec{r})$を次式のQおよび$\vec{q}$を使って表せ。

$$Q = \int_{\vec{r}\,' \in V} d^3 r' \rho(\vec{r}\,'), \quad \vec{q} = \int_{\vec{r}\,' \in V} d^3 r' \rho(\vec{r}\,') \vec{r}\,' \tag{1}$$

問8　分布している電荷の電荷密度として

$$\rho(\vec{r}\,') = \begin{cases} \dfrac{3q}{\pi a^3} \cos\theta' & (r' \leq a) \\ 0 & (r' > a) \end{cases} \tag{2}$$

を考える。ここでq、aは正の定数、$\vec{r}\,'$の座標を3次元極座標(r', θ', ϕ')で表した。つまり$x' = r' \sin\theta' \cos\phi'$、$y' = r' \sin\theta' \sin\phi'$、$z' = r' \cos\theta'$である。原点Oから点Pまでの距離$r$は、原点Oから電荷の分布している領域までの距離に比べて十分大

きいとする。つまり $r \gg a$ とする。この時、前問で求めた Q および $\vec{q}$ を使って表した静電ポテンシャルの表式はとても良い近似式であり、この問題でも利用できる。

式 (2) の電荷分布の時、式 (1) の Q を考える。Q を計算する時の体積積分を 3 次元極座標 (r', θ', ϕ') で考える。領域 $0 \leq \theta' \leq \pi$ の θ' の積分で、$0 \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$ の領域を積分した量と $\frac{\pi}{2} \leq \theta' \leq \pi$ の領域を積分した量に分けて、それぞれを Q_+、Q_- とする。つまり

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\vec{r}' \in V} d^3r' \rho(\vec{r}') = \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' \int_0^a dr' r'^2 \rho(\vec{r}') \\ &= Q_+ + Q_- \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} Q_+ &= \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta' \sin\theta' \int_0^a dr' r'^2 \rho(\vec{r}') \\ Q_- &= \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta' \sin\theta' \int_0^a dr' r'^2 \rho(\vec{r}') \end{aligned}$$

である。Q_+、Q_- および Q を求めよ。必要ならば以下の積分公式は使っても良い。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta' \sin\theta' \cos\theta' = \frac{1}{2}, \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta' \sin\theta' \cos\theta' = -\frac{1}{2}$$

問 9　式 (2) の電荷分布の時、式 (1) の $\vec{q}$ を求めよ。

問 10　上で計算した Q と $\vec{q}$ はどのような量であるか。簡潔に述べよ。

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士前期課程

理学専攻　物理科学領域

物理学　問題　【 Ⅲ 】【 Ⅳ 】

2025 年 8 月 20 日（水）　13 時 00 分～15 時 00 分

受験上の注意

1. この冊子には物理学【Ⅲ】、物理学【Ⅳ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

2. 答案用紙は青、緑を全員に各１枚、それに草案用紙を１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏側には何も書き込んではならない。

3. 答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

x 軸上を運動する粒子の量子力学的振る舞いについて，以下の問いに答えよ．解答では途中の計算も記述すること．必要であれば次の積分公式（γ は正の定数）を用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\gamma x^2} dx = \frac{1}{2\gamma}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

問１ 2つの波動関数 $\phi(x), \psi(x)$ の内積 (ϕ, ψ) を，

$$(\phi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^*(x)\psi(x)$$

と定義する．ある演算子 $\hat{A}$ に対してエルミート共役な演算子 $\hat{A}^\dagger$ とは，遠方 $(x \to \pm\infty)$ では十分に速く 0 に近づくような任意の波動関数 $\phi(x), \psi(x)$ に対して，

$$(\phi, \hat{A}\psi) = (\hat{A}^\dagger\phi, \psi)$$

を満たすものをいう．$\hat{A}$ がエルミート演算子とは，$\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ となるものをいう．

問1-1 演算子 $\hat{F} = -\dfrac{d}{dx}$ にエルミート共役な演算子 $\hat{F}^\dagger$ を求めよ．

問1-2 演算子 $\hat{F}^\dagger\hat{F}$ は，エルミート演算子であることを示せ．

問1-3 エルミート演算子 $\hat{Q}$ の固有値を q，固有値 q に属する固有関数を $\psi(x)$ と表すことにする．固有値 q は実数となることを示せ．

問1-4 エルミート演算子 $\hat{Q}$ の異なる固有値 q_i，q_j（$q_i \neq q_j$）それぞれに属する固有関数 $\psi_i(x)$，$\psi_j(x)$ は互いに直交することを示せ．

問２ 質量 m，角振動数 ω の 1 次元調和振動子のハミルトニアンが，位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ を用いて次式で与えられている．

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 .$$

ここで，プランク定数を 2π で割った量を $\hbar$ として，$\hat{x}$ と $\hat{p}$ は正準交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たす．3つの演算子 $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$，および $\hat{N}$ を次式で導入する．

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \quad \hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}.$$

問2-1 次の交換関係を示せ．

$$(1) \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \qquad (2) \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger.$$

問2-2 ハミルトニアン $\hat{H}_0$ を $\hat{N}$ を用いて表せ．

問2-3 $\hat{N}$ の固有値 n に属する規格化された固有ケットを $|n\rangle$ のように表す．問2-1の交換関係を用いて次式を示せ．

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle\,.$$

問2-4 基底状態を表すケット $|0\rangle$ は，$\hat{a}|0\rangle = 0$ を満たすものとして定義される．このとき基底状態を表す規格化された波動関数，

$$\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$$

を求めよ．ただし，一般にケット $|\psi\rangle$ に対応する波動関数は，$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ と表され，運動量演算子 $\hat{p}$，ケット $|\psi\rangle$，および対応する波動関数 $\psi(x)$ に対して次の関係式が成り立つ．

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)\,.$$

問3 問2で考えたハミルトニアン $\hat{H}_0$ に対する固有値と固有ケットをそれぞれ $E_n^{(0)}$, $|n\rangle$ と表すと，次式が成り立つ．

$$\hat{H}_0|n\rangle = E_n^{(0)}|n\rangle\,,\quad E_n^{(0)} = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\,,\quad \langle l|n\rangle = \delta_{l,n}\,.$$

ここで，$n, l = 0, 1, 2, \cdots$ である．

問3-1 $\hat{H}_0$ に摂動 $\hat{H}' = \beta\hat{x}^2$（$\beta$ は定数）を加える．このとき，エネルギー固有値に対する摂動の1次の補正項 $E_n^{(1)} = \langle n|\hat{H}'|n\rangle$ を求めよ．ただし，問2-3で与えられた関係式，および，$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$，（$n \geqq 1$）を用いよ．

問3-2 全系のハミルトニアン $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ のエネルギー固有値 E_n は，厳密に求められる．

(1) E_n を記せ．

(2) (1) の E_n を小さなパラメーター $\lambda = \dfrac{2\beta}{m\omega^2}$ の1次のオーダーまで級数展開し，問3-1の結果と比較せよ．

問4 問2で考えたハミルトニアン $\hat{H}_0$ に対する基底状態の固有値と固有関数を変分法で求めたい．

問4-1 $\gamma(>0)$ をパラメーターとする規格化された波動関数 $\psi_\gamma(x) = \langle x|\psi_\gamma\rangle = \left(\dfrac{\gamma}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\gamma x^2/2}$ に対して，次を計算せよ．

$$E_\gamma = \frac{\langle\psi_\gamma|\hat{H}_0|\psi_\gamma\rangle}{\langle\psi_\gamma|\psi_\gamma\rangle}\,.$$

問4-2 $\dfrac{dE_\gamma}{d\gamma} = 0$ となる γ を求め，その値に対する E_γ と $\psi_\gamma(x)$ を求めよ．

物理学　【IV】(答案用紙：緑)

N 個の独立な粒子からなる系がある。おのおのの粒子は、$-\varepsilon$ と ε のエネルギーを持つ2つの状態しか取り得ないとする (ε は正の定数である)。系は温度 T で熱平衡状態にある。粒子の並進運動や粒子間の相互作用は無視する。ボルツマン定数を k_{B}、$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ とする。以下では、統計力学における物理量 A の期待値を $\langle A \rangle$ と表す。

問1　以下の設問に答えよ。

(a) 系の分配関数 Z を書け。

(b) 内部エネルギー $U = \langle E \rangle$ を求めよ。ただし E は系のエネルギーである。

(c) 比熱 C を求めよ。

(d) ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。

(e) エントロピー S を求めよ。

(f) エネルギーの分散 $\Delta E^2 \equiv \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle$ を求めよ。

(g) エネルギーが ε の状態にある粒子の個数を N_+ と記す。N_+ の期待値 $\langle N_+ \rangle$ を求めよ。

(h) N_+ の分散 $\Delta {N_+}^2 \equiv \langle (N_+ - \langle N_+ \rangle)^2 \rangle$ を求めよ。

この系ははじめ、非常に高温の熱浴と接触しており熱平衡状態にあったとしよう。これを始状態とする。簡単のためその温度は無限大とする。ある時刻に系を静かに高温の熱浴から離し、有限の温度 T の熱浴に接触させ、熱平衡状態になるまで十分に待った。これを終状態とする。

問2　以下の設問に答えよ。

(a) この過程の前後のエントロピーの変化 ΔS を計算せよ。

(b) この過程の前後において、熱力学第二法則が成立していることを示せ。

引き続き、系は温度Tで熱平衡状態にあるとする。外部からの操作で、粒子が取る状態のエネルギー$\pm\varepsilon$を2倍の$\pm 2\varepsilon$にゆっくり変化させた。

問3　以下の設問に答えよ。

(a) この外部からの操作の間、系は温度Tの熱浴に接触したままであったとする。この操作を完了するためには、系に対してどれだけの仕事Wをする必要があるか答えよ。Wの符号は、外部が系に仕事をする場合を正、その逆を負となるように定義する。

(b) 同じ操作を、今度は系を温度Tの熱浴から切り離し、孤立させた状況で行ったとしよう。操作を完了するためには、系に対してどれだけの仕事Wをする必要があるか答えよ。Wの符号は、外部が系に仕事をする場合を正、その逆を負となるように定義する。また、(b) の場合のWの大きさ$|W|$と、(a) の場合の$|W|$との大小関係を議論せよ。ただし、(b) の断熱的な操作によって、エネルギー状態間の遷移は起こらないものとする。

(c) 前問の孤立させた操作が完了したとき、系の温度はTと比べてどれだけ変化したか答えよ。

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士前期課程

理学専攻　物理科学領域

外国語　問題

2025 年 8 月 20 日（水）　15 時 40 分～16 時 40 分

受験上の注意

1. 答案用紙(橙)と草案用紙を１枚ずつ配布してあるが、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏側には何も書き込んではならない。

2. 答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

以下の英文を読み、下記の設問に答えなさい。

Physics in Nature: The Story of Solar Sails and Climate Solutions

In the search for clean and sustainable energy, scientists are not only looking at new materials and technologies on Earth, but also drawing inspiration from space. (ア) One surprising example is the solar sail—a spacecraft propulsion system that moves using sunlight alone. It doesn't use fuel or engines; instead, it works by converting the momentum of photons (light particles) into motion.

This principle is based on the law of conservation of momentum, a core idea in physics. When light hits the large reflective sail, it transfers a tiny amount of momentum. Over time, this continuous push allows the spacecraft to accelerate in space, hence increasing its kinetic energy. While solar sails were originally designed for deep-space travel, their mechanism offers an interesting comparison to renewable energy systems on Earth. (イ)

Solar sails demonstrate how energy can be transferred without burning anything. Similarly, renewable technologies like wind turbines and solar panels convert natural forces into usable energy without producing harmful emissions. Both systems rely on (Q1) principles: using natural energy sources in efficient and clean ways.

(a) <u>地球温暖化を防ぐためには、こうしたクリーンエネルギーの利用がますます重要になっている。</u>Wind and solar power now provide electricity to millions of homes around the world, reducing the need for fossil fuels and lowering carbon emissions. (ウ)

However, there are still challenges. (エ) But by storing excess energy and combining sources—such as wind, solar, and hydro—we can create a stable and sustainable energy grid.

In addition to technical solutions, education and awareness are key. (Q2) people understand the science behind clean energy, the more likely they are to support and use it. (b) <u>These ideas show that physics is not just for laboratories or rocket science—it's a tool we can use to solve real-world problems, from space travel to climate change.</u>

Q1) 本文の空欄 (Q1) に最も適切な語句を選びなさい。

A. explosive

B. wasteful

C. physical

D. random

Q2) 本文の空欄 (Q2) に最も適切な語句を選びなさい。

A. Although

B. Because

C. Unless

D. The more

Q3) 以下の文の中で文法的に正しいものを１つ選びなさい。

A. Solar sails have carried no fuel and producing no emissions.

B. Solar sails carry no fuel, creating no emissions as a result.

C. Solar sails carries no fuel and creates no emissions.

D. Solar sails has carried no fuel and created no emissions.

E. Solar sail carry no fuel, which make them environmentally friendly.

Q4) 次の文を、本文中の（ア）（イ）（ウ）（エ）の中で最も適切な場所に挿入しなさい。

Since the weather can change unexpectedly, renewable energy sources like wind and solar cannot always provide enough electricity when it is needed.

Q5) 本文において、ソーラーセイルと再生可能エネルギーにはある重要な共通点があると述べられています。その共通点として以下の A–D から本文中の記述に最も合致するものを１つ選びなさい。

A. Both systems operate independently of environmental factors and require no human intervention.

B. Both harness naturally occurring forces to produce energy without combustion or pollutant emissions.

C. Both technologies rely on advanced storage systems to ensure uninterrupted energy supply.

D. Both were initially designed for space exploration and later adapted for terrestrial applications.

Q6) 下線 (a) に対応する自然な英訳を答えなさい。

Q7) 下線 (b) を日本語に訳しなさい。