力学特論 演習問題 No. 1 (2021年10月7日)
解析力学と線形代数の復習
6問 (4ページ) あります。

問題 1-1 ： 直交行列

$O^T O = O O^T = 1$ が成立する $N \times N$ の実数行列 O を直交行列という。（ここで O^T は行列 O の転置行列である。）実 N 次元ベクトル $\vec{v} = (v_1, \cdots, v_N)^T$ を直交行列で変換すること、$\vec{v'} = O\vec{v}$、を直交変換という。

(i) ベクトルの長さや、2つのベクトルの間の角度は、直交変換で変わらないことを示せ。（ヒント：2つのベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ の内積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$、もしくは、$\vec{u}^T \vec{v}$ が直交変換で不変であることを示せばよい。）このことは、N 次元ベクトル空間の正規直交基底 $\{\vec{e}_i\}$ を別の正規直交基底 $\{\vec{e'_i}\}$ に変換することを示している。更に、直交行列 O の列ベクトルは、正規直交基底になることを示せ。つまり、$O = (\vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_N)$ としたとき、$\vec{E}_i^T \vec{E}_j = \delta_{ij}$ を示せ。このことは、正規直交基底 $(\vec{e}_i)_l = \delta_{il}$ と取ると、$\vec{E}_i = O\vec{e}_i$ となることを示している。

(ii) 直交行列 $\{O\}$ は行列としての積に関して群をなすことを示せ。つまり、

(a) 任意の二つの直交行列 O_1 と O_2 に対して、$O_1 O_2$ は直交行列である。

(b) 任意の3つの直交行列 O_1、O_2 と O_3 に対して、$(O_1 O_2) O_3 = O_1 (O_2 O_3)$ を満たす。（結合則）

(c) 単位元 $\mathbf{1}$ が存在する。つまり、$O\mathbf{1} = \mathbf{1}O = O$。

(d) 逆元 O^{-1} が存在する。つまり、$OO^{-1} = O^{-1}O = \mathbf{1}$

を示せ。この群を直交群と呼ぶ。

(iii) $N \times N$ 実対称行列 $A = A^T$ は、直交行列 O によって対角化できることが知られている。つまり、OAO^T が対角行列になる O が存在する。以下、対称行列の問題になる。λ_i を対称行列 A の固有値、$\vec{u}_i$ をその固有値に対応する固有ベクトルとする。つまり、$A\vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i$ である。ここで、$i = 1, \cdots, N$ である。もし、$\lambda_i \neq \lambda_j$ の時、対応する固有ベクトルは直交する、つまり、$\vec{u}_i^T \vec{u}_j = 0$ となることを示せ。

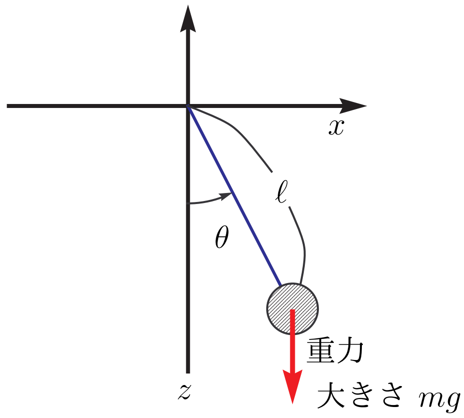
(iv) A が実対称行列の時、固有値 λ_i は実数であることを示せ。

(v) 次の行列 A の固有値と固有ベクトル、対角化行列を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

問題 1-2 ：単振り子

右図のように、質量の無視できる長さ ℓ の棒の一端に質量 m の質点が固定された単振り子を考える。この振り子に対し、鉛直方向に重力が作用している。図のように一般化座標 θ を設定し、重力加速度の大きさを g として、以下の問に答えよ。



(a) 一般化座標 θ を用いて、この系に対するポテンシャル V をあらわせ。

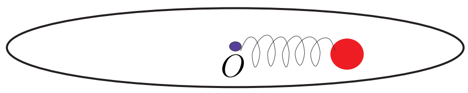
(a) 一般化座標 θ を用いてこの系に対するラグランジアンをあらわせ。

(b) θ に共役な運動量を求めよ。

(c) Euler-Lagrange 方程式を求めよ。

問題 1-3 ：２次元調和振動子

右図のように、原点 O に一端が固定されている自然長 l でばね定数 k のバネの他端に質量 m の質点が固定されている。質点と水平面の摩擦は無視できるとする。質点が水平面上を運動するとき、以下の問に答えよ。



(a) 2 次元平面上の極座標を用い、この系に対するラグランジアンを求めよ。

(b) Euler-Lagrange 方程式を求めよ。

(c) Euler-Lagrange 方程式から角運動量が保存することを示せ。

(d) 力学的エネルギー E とハミルトニアン H を求めよ。

(e) ハミルトンの運動方程式を求めよ。

問題 1-4 [省略可] ： サイクロイド曲線

静止している質点が $(x,y)=(0,0)$ から抵抗を無視できるある経路に沿って滑り落ちたのち、$(x,y)=(a,0)$ に到達したとする。最短時間で到達するためにはどのような曲線の経路に沿って行けばいいかを考える。ただし、x は水平方向、y は鉛直（下向き）方向に対応する座標である。

(a) 質点の速さ v を $y'=\frac{dy}{dx}$、$\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ で表せ。

(b) 質点が y にあるときの速さをエネルギー保存則から求めよ。ただし、重力加速度を g とする。

(c) 到達時間を $T=\int_0^a dxF(y,y')$ と書いたとき、$F(y,y')$ を求めよ。また、このとき $y=y(x)$ が満たす微分方程式を書き下せ。

(d) 上の微分方程式の解が次の形のサイクロイドとなることを示せ。

$$\begin{aligned} x &= \alpha(\theta-\sin\theta) \\ y &= \alpha(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

ただし α は定数である。(y' を θ の関数で、また、$\dfrac{d}{dx}$ を θ および、$\dfrac{d}{d\theta}$ で表せ)

(e) α を a で表せ。

問題 1-5 [省略可]： ポアソン (Poisson) 括弧

正準変数 q_r, p_r $(r=1,2,\dots,n)$ で記述される力学系がある。A と B はともに正準変数 q_r, p_r $(r=1,2,\dots,n)$ の関数とするとき、A と B がつくるポアソン括弧 $[A\,,\,B]$ を

$$[A\,,\,B]=\sum_r\left(\frac{\partial A}{\partial q_r}\frac{\partial B}{\partial p_r}-\frac{\partial B}{\partial q_r}\frac{\partial A}{\partial p_r}\right)$$

で定義する。

(a) A, B, C を正準変数の関数とするとき、次の関係式が成り立つことを確かめよ。

(1) $[A\,,\,B]=-[B\,,\,A]$

(2) λ_1, λ_2 を正準変数を含まない量とするとき $[A\,,\,\lambda_1B+\lambda_2C]=\lambda_1[A\,,\,B]+\lambda_2[A\,,\,C]$

(3) $[AB\,,\,C]=A[B\,,\,C]+[A\,,\,C]B$

(4) $[[A\,,\,B]\,,\,C]+[[B\,,\,C]\,,\,A]+[[C\,,\,A]\,,\,B]=0$

(b) ポアソン括弧を使うと、ハミルトンの方程式が次のように書けることを確かめよ。

$\dot{q}_r = [q_r\,,\,H]$、$\dot{p}_r = [p_r\,,\,H]$

ただしここで、H はハミルトニアンである。

D, F, G を時刻 t における正準変数 q_r, p_r $(r = 1, 2, \ldots, n)$ 、及び t の関数とする。

(a) ハミルトンの方程式を用いて、D の時間微分が次のようになることを示せ。

$$\frac{dD}{dt} = [D\,,\,H] + \frac{\partial D}{\partial t}$$

(b) 次の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{d}{dt}[F\,,\,G] = \left[\frac{dF}{dt}\,,\,G\right] + \left[F\,,\,\frac{dG}{dt}\right]$$

問題 1-6 ： ポアソン括弧と保存量

正準変数 q, p で記述される力学系がある。次の問に答えよ。

(a) ハミルトニアン $H(q, p)$ が時刻 t を陽に含んでおらず、また $F(q, p, t)$ が保存量であれば、$\dfrac{\partial F}{\partial t}$ も保存量であることを示せ。

(b) ハミルトニアンが、$H = \dfrac{p^2}{2m} + mgq$ であるような、質量 m の粒子の重力加速度 g のもとでの落下運動を考える。このとき、$F = q - \dfrac{p}{m}t - \dfrac{1}{2}gt^2$ は保存量であって、従って $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ もそうなっていることを運動方程式を用いて確かめよ。

電磁気学演習問題（2021年10月8日）

（問題1）真空中に半径 a の球があり、球内に電荷が一様な電荷密度 ρ で分布する。その内外に生じる電場をガウスの法則 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$ を用いて求めよ。また、球中心の電位 ϕ（無限遠で $\phi = 0$）を求めよ。

（問題2）真空中に電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ で分布する電荷が作る電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|} dV'$$

で与えられる（無限遠で $\phi = 0$ という境界条件でのポアソン方程式の解）。これを利用して、半径 a の球内に電荷が一様な電荷密度 ρ で分布するとき（問題1と同じ設定）、その内外に生じる電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めよ (中心を $r = 0$ とする)。また、球中心で、問題1の解と一致することを確認せよ。

（問題3）電流密度 $\boldsymbol{i}$ が作る磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を考える。$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ で定義されるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が、$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ を満すとき、$\boldsymbol{A}$ に対して微分方程式

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{i}$$

が成り立つことを示せ（ヒント：$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$ を用いる）。また、無限遠で $\boldsymbol{A} = 0$ という境界条件のもとで、上の微分方程式の解を求めよ（ヒント：ポアソン方程式との類似性に着目、問題2の式を利用する）。さらに、その解を $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ に代入して、次のビオ・サバールの法則が導かれることを示せ。

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r'}) \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^3} dV'$$

（問題4）問題3のビオ・サバールの法則において、電流を I、電流の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{t}$、線素を dl とすると、$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r'})dV' = I\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r'})dl'$ と表せることを利用して、以下を求めよ。

(4-1) 半径 a の円形回路に電流 I が流れているとき、円の中心軸上の高さ z での磁束密度を求めよ。

(4-2) 半径 a、単位長さの巻数 n の無限に長い円筒コイルがある。前問の結果を用いて、中心軸上の磁束密度を求めよ。また、アンペールの法則から求めた結果と一致することを確認せよ。

（問題5）Maxwell 方程式のうち、変位電流を含むアンペールの法則と、ファラデーの法則を用いて、電磁場のエネルギー密度 $W = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}/2 + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}/2$ とポインティングベクトル $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ の間に次の関係が成り立つことを示せ。また、各項が意味するところを述べよ。

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{E}$$

（ヒント：$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H}$ を用いる。）

（問題6）真空中（$\rho = 0$、$\boldsymbol{i} = 0$）の電場に対して、

(6-1) Maxwell 方程式から、$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$ の波動方程式が成り立つことを示せ。

(6-2) 上記の解が、z 軸方向に進む平面波 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0} \exp[i(kz - \omega t)]$（$k > 0$、$\omega > 0$）で表せるとき、波数 k と角振動数 ω の間に成り立つ関係を求めよ。このとき、波の位相速度を求めよ。