学位申請論文公開講演会

日　時:　１月２０日（木）１３：３０～開始

申請者:　村田 宗一

場　所:　Ｂ４小講義室（Ｂ－４５４）

題　目:　Lie symmetry に基づく非線形偏微分方程式の相似型解の構成

(主論文の要旨)

非線形微分方程式の厳密解を得ることは非常に難しく、多くの方程式系では特解という形でしか厳密解は得られない。本研究では、非線形偏微分方程式に系統的に適用できる方法を開発する立場から相似解に注目した。相似解は、微分方程式の対称性の 1 つである Lie symmetry に対して不変な解であることが知られているからである。

微分方程式の対称性とは、微分方程式を不変にするような局所変換群に対する対称性である。居所変換群の作用素はベクトル場として表され、微分方程式からベクトル場を求めるため決定方程式は、微分方程式が線形・非線形に関わらず系統的に与えられることが分っている。対称性に不変な解は、対称性に不変であるために条件 (invariant 条件) と微分方程式を連立させて解くことで得られる。この解法を不変解の解法と呼ぶ。Lie symmetry とは、局所変換群の作用域を独立変数・従属変数のみに限ったものであり、決定方程式は線形の連立偏微分方程式である。基本的な例としては、並進対称性やスケール対称性、回転対称性などがある。従来は、Lie symmetry に対して不変解の解法を適用し、相似解が求められてきた。 この研究では、方程式系に依存しない統一的な解法を系統的に適用できるようにするために、不変解の解法という枠組みを重視して非線形偏微分方程式の厳密解の解法を開発した。

本論文で提唱した解法は以下の 2 つである。

(1)Renormalizationn group symmetry (RGS) method の拡張

RGS Method は、対称性に基づいた初期値問題の解法として D.V.Shirkov らのよって導入された。RGS Method は、相似解として初期値問題の解を与える。Shirkov らは、対称性が無限自由度を持つ場合、その無限自由度を用いて初期条件を広く取れることを示した。しかし、物理で現れる多くの方程式系は、無限自由度を持つ対称性を持たない。論文では、invariant 条件で変形した微分方程式を縮退させるという方法を開発した。縮退で生まれた自由度により初期条件を広く取れ、また、対称性に無限自由度は必要としない。論文では、浅水波方程式、3 次元断熱ガスに対するオイラー方程式を例として紹介した。

(2) 新しいクラスの対称性とそれに基づく不変解の解法

従来は、不変解の解法は Lie symmetry のみに対して適用されてきた。一方で、試行錯誤の結果として、関数形が相似解とよく似た解がいくつも知られている。本研究ではこの点に注目し、相似解の解法の枠組みを拡張するために Lie symmetry を含む新しいクラスの対称性を導出し、その対称性に基づく不変解の解法を開発した。新しい対称性は、補助方程式を追加した微分方程式を不変にする。Lie symmetry は微分方程式のすべての解をまた解へと変換する対称性である。一方で、補助方程式を追加した微分方程式の対称性は制限された解のみを変換すればよいので、結果として Lie symmetry を含む広いクラスの対称性となる。この広いクラスの対称性に対する不変解を相似型解と定義した。例として、自己重力下の球対称 あるは円柱状ポリトロピックガスの流体方程式、3 次元球対称断熱ガスの対するオイラー方程式を扱った。

講演会では、主に方法 (2) について紹介する。